ALGEBRA II
11. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei k ein Körper, A eine endlich dimensionale k-Algebra und M ein A-Modul. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen equivalent sind:

(a) M ist ein endlich dimensionaler k-Vektorraum.
(b) M ist ein endlich erzeugter A-Modul.
(c) M ist ein noetherscher A-Modul.
(d) M ist ein artinscher A-Modul.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und n eine natürliche Zahl. Dem gerichteten Graphen

$$Q\colon 1 \xrightarrow{a_1} 2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-2}} n-1 \xrightarrow{a_{n-1}} n$$

kann auf folgende Weise eine K-Algebra KQ zugeordnet werden:

(i) Die Wege in Q bilden eine Basis

$$\mathcal{B} := \{[i,i] \mid i = 1,\dots,n\} \cup \{[j,k] := a_{j-1}a_{j-2}\dots a_{k+1}a_k \mid 1 \le k < j \le n\}$$

des K-Vektorraums KQ.

(ii) Seien $1 \le a \le b \le n$ und $1 \le c \le d \le n$ ganze Zahlen. Die Multiplikation in KQ ist durch die folgende Vorschrift auf den Basiselementen eindeutig festgelegt:

$$[d,c] \cdot [b,a] := \begin{cases} [d,a] & \text{falls } b = c; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass KQ eine K-Algebra ist. Zeigen Sie ferner, dass KQ als K-Algebra zur Algebra

$$A_n := \left\{ \begin{pmatrix} K & K & \dots & K \\ 0 & K & \dots & K \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & K \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathsf{M}_n(K)$$

der oberen $n \times n$-Dreiecksmatrizen mit Einträgen in K isomorph ist.

Aufgabe 3. (2+2 Punkte)

Sei k ein Körper und R eine zweidimensionale k-Algebra. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

Abgabe: Donnerstag, 28. Juni 2018, bis 14 Uhr in das Postfach von Jan Geuenich im Raum V3-126.

(a) R ist kommutativ.
(b) R ist entweder ein Körper, oder es gibt Ringisomorphismen $R \cong k \times k$ oder $R \cong k[x]/(x^2)$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei k ein Körper und G eine endliche Gruppe. Bestimmen Sie das Zentrum $Z(k[G])$ der Gruppenalgebra $k[G]$. Fassen Sie dafür die Gruppenalgebra als Menge der Funktionen $f: G \to k$ auf.