ALGEBRA II
13. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. (2+1+1 Punkte)

(a) Sei R ein Ring und M ein R-Modul von endlicher Länge. Seien P und Q Untermoduln von M. Zeigen Sie, dass $l(P) + l(Q) = l(P + Q) + l(P \cap Q)$ gilt.
(b) Sei $n \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die Länge des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}$.
(c) Sei $n \in \mathbb{Z}$ und k ein Körper. Bestimmen Sie die Länge des $k[X]$-Moduls $k[X]/(X^n)$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Hat M als Modul über $\mathrm{End}_R(M)$ aufgefasst Länge n, so hat für jede Menge $I \neq \emptyset$ das Produkt M^I über $\mathrm{End}_R(M^I)$ die Länge n.

(Hinweis: Der Fall $|I| < \infty$ ist bereits interessant.)

Aufgabe 3. (2+2 Punkte)

Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $f \in \mathrm{End}_R(M)$.

(a) Sei $r > 0$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass $M/f^r(M)$ ein R-Modul endlicher Länge ist, falls $M/f(M)$ endliche Länge hat.
(b) Benutzen Sie das Fitting Lemma (Lemma 10.1) um zu zeigen, dass der R-Modul $\ker f$ endliche Länge hat falls M noethersch ist und $M/f(M)$ endliche Länge hat.

Aufgabe 4. (2+2 Punkte)

(a) Sei R ein Ring. Seien I und J Linksideale, so dass $I + J = R$ gilt. Zeigen Sie, dass es einen R-Modulisomorphismus $I \oplus J \cong R \oplus (I \cap J)$ gibt.
(Hinweis: Betrachten Sie die kanonische Abbildung $I \oplus J \to R$)
(b) Sein nun $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Zeigen Sie, dass es einen R-Modul M gibt, so dass die Eindeutigkeitsaussage im Satz von Krull-Remak-Schmidt nicht gilt.
(Hinweis: Zeigen Sie, dass die Ideale $(3, 2+\sqrt{-5})$ und $(3, 2-\sqrt{-5})$ keine Hauptideale in R sind. Betrachten Sie dazu $|\,r\,| := r \cdot \overline{r} = a^2 + 5b^2$, wobei $r = a + b\sqrt{-5} \in R$ und $\overline{r}$ die komplex Konjugierte von r bezeichne. Nutzen Sie nun $|\,rs\,| = |\,r\,|\,|\,s\,|$.)

Abgabe: Donnerstag, 12. Juli 2018, bis 14 Uhr in das Postfach von Jan Geuenich im Raum V3-126.