Henning Krause
SS 2017

Lineare Algebra
Klausur 12.9.2017

Julia Sauter
Jan Geuenich

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note

Zugelassene Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt.

Diese Klausur enthält 16 Seiten. Überprüfen Sie dies. Lösen Sie die Klammerung der Seiten nicht auf. Ihre Lösungen tragen Sie auf den Seiten der Aufgabenstellung ein. Für Vorüberlegungen verwenden Sie das Konzeptpapier der letzten Blätter. Falls Sie weiteres Papier benötigen, fragen Sie die Klausuraufsicht. Bitte verwenden Sie keinen Rotstift.

Bitte geben Sie knappe aber zugleich hinreichend ausführliche Begründungen für Ihre Ergebnisse. Ihr Lösungsweg muss nachvollziehbar sein. Sie dürfen dabei auf Ergebnisse aus der Vorlesung verweisen, sollten diese aber klar benennen.

In den Multiple-Choice-Aufgaben erhalten Sie für jede richtig vorgenommene Markierung einen Punkt. Für jede nicht richtig vorgenommene Markierung wird ein Punkt abgezogen. Das Nichtmarkieren einer Aussage führt nicht zum Punktabzug. Bei negativer Gesamtpunktzahl in einer Multiple-Choice-Aufgabe werden 0 Punkte vergeben.

Name, Vorname:

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien A und B zwei $(n \times n)$-Matrizen über einem Körper K.

		Wahr	Falsch
(a)	Es gilt immer $p_{A^T} = p_A$.	☐	☐
(b)	Wenn A und B dieselben Eigenwerte haben, so gilt immer $p_A = p_B$.	☐	☐
(c)	Ist A invertierbar, so gilt immer $p_A(0) \cdot p_{A^{-1}}(0) = 1$.	☐	☐
(d)	Sind A' und B' zwei $(n \times n)$-Matrizen über K, sodass A und A' ähnlich sind sowie B und B' ähnlich sind, dann sind immer auch AB und $A'B'$ ähnlich.	☐	☐

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $|\cdot|$. Außerdem sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Man entscheide für jede der folgenden Aussagen, ob sie äquivalent dazu ist, dass f orthogonal ist.

		Ja	Nein
(a)	Es gibt eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von f besteht.	☐	☐
(b)	Für alle $v \in V$ gilt $|f(v) - v| = 0$.	☐	☐
(c)	Für alle $v \in V$ gilt $|f(v)| = |v|$.	☐	☐
(d)	Es gilt $f^*f = \mathrm{id}_V$ für die zu f adjungierte Abbildung f^*.	☐	☐

Name, Vorname:

Aufgabe 3 (2 + 3 + 3 Punkte):

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})\,.$$

(a) Man zeige, dass das charakteristische Polynom p_A in Linearfaktoren zerfällt, und gebe für jeden Eigenwert von A seine algebraische Vielfachheit an.

(b) Man bestimme die Jordansche Normalform von A.

(c) Man bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{Q}^3$ der Gleichung

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Name, Vorname:

Aufgabe 4 (2 + 3 + 3 Punkte):

Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ als euklidischen Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt. Sei

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

(a) Man zeige, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist.

(b) Man bestimme eine Orthonormalbasis von U.

(c) Man bestimme eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$.

Name, Vorname:

Aufgabe 5 (2 + 4 + 2 Punkte):

Sei n eine natürliche Zahl und sei A eine reelle $(n \times n)$-Matrix.

(a) Man gebe die Definitionen aus der Vorlesung wieder, unter welcher Bedingung A *orthogonal* und wann A *symmetrisch* genannt wird.

(b) Wir nehmen nun an, es gebe eine orthogonale Matrix S, sodass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist. Man beweise, dass A symmetrisch ist.

(c) Man entscheide, ob die Funktion $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y) \mapsto x^T A y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

Name, Vorname:

Aufgabe 6 (2 + 3 + 3 Punkte):

Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Außerdem seien $f, g\colon V \to V$ lineare Abbildungen und $f^*\colon V \to V$ bezeichne die zu f adjungierte Abbildung.

(a) Man gebe die Definition aus der Vorlesung wieder, wann f *normal* genannt wird.

(b) Man zeige: Ist f normal, so gilt $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^*)$.

(c) Man zeige: Sind f und g normal, so ist genau dann $gf = 0$, wenn $fg = 0$ ist.