LINEARE ALGEBRA II
1. PRÄSENZÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Wir betrachten auf diesem Blatt den Standardraum als Spaltenraum.

Aufgabe 1. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{Q})$$

(a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ über den rationalen Zahlen.
(b) Es sei $f_A \colon \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^4, f_A(x) = Ax$. Finden Sie eine Basis für $\mathrm{Ker} f_A$ und eine Basis für $\mathrm{Im} f_A$.

Aufgabe 2.

(a) Es sei K ein Körper und es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(K) \text{ mit } ad - bc \neq 0.$$

Zeigen Sie: A ist invertierbar und es gilt

$$A^{-1} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

(b) Es sei $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Finden Sie heraus, ob die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{4} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(K)$$

invertierbar ist. Falls ja, finden Sie die inverse Matrix.

Aufgabe 3. Wir betrachten den Körper $\mathbb{Q}$ und die lineare Abbildung

$$f \colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4, \quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 - 2x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Es sei $M = (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$. Berechnen Sie $\mathrm{rg} M = r$. Finden Sie invertierbare Matrizen B, A, so dass gilt

$$BMA^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Finden Sie Basisvektoren a_1, a_2, a_3 für $\mathbb{Q}^3$ und b_1, b_2, b_3, b_4 für $\mathbb{Q}^4$, so dass gilt

$$M(f; a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Es sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring über K.
Es sei $V = K[X]_{\leq 4} = \{p \in K[X] \mid p = c_4X^4 + c_3X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0, c_i \in K\}$. Dies ist ein K-Vektorraum und

$$a_1 = X^4, a_2 = X^4 - X^3, a_3 = X^3 - X^2, a_4 = X^2 - X, a_5 = X - 1$$

ist eine angeordnete Basis von V. Sei $b_1 = 1, b_2 = X^2, b_3 = X^4, b_4 = X+1, b_5 = X^3$ eine weitere angeordnete Basis. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f \colon V \to V,$$

$$f(c_4X^4 + c_3X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0) = 4c_4X^3 + 3c_3X^2 + 2c_2X + c_1$$

Finden Sie $M(f; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$.