LINEARE ALGEBRA II
2. PRÄSENZÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Aufgabe 1. Es seien

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

zwei Permutationen. Berechnen Sie $\sigma \circ \tau$ und schreiben Sie σ und τ als Komposition von Transpositionen.

Aufgabe 2. (a) Berechnen Sie das Signum der folgenden Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Beweisen Sie, dass $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{-1, 1\}$ ein *Gruppenhomomorphismus* ist, das heißt zeigen Sie: 1. $\operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = 1$ und 2. $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$ für alle $\sigma, \tau \in S_n$.

Aufgabe 3.

(a) Es sei e_1, e_2 die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. Sei d eine Determinantenform auf $\mathbb{R}^2$ mit $d(e_1, e_2) = 2$. Berechnen Sie:

$$d(e_2, e_2), \quad d(e_2, e_1), \quad d(e_1, e_1 + e_2), \quad \text{und} \quad d(4e_1 + 3e_2, 2e_1 + 2e_2).$$

(b) Es sei e_1, e_2 die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. Es sei $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Determinantenform mit $d(e_1, e_2) = 1$. Finden Sie Vektoren $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$d(v_1 + w_1, v_2 + w_2) \neq d(v_1, v_2) + d(w_1, w_2), \quad d(\lambda v_1, \lambda v_2) \neq \lambda d(v_1, v_2).$$

Aufgabe 4.

(a) Es sei d eine Determinantenform auf $\mathbb{Q}^3$. Es seien

$$v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (4, 5, 6), \quad v_3 = (7, 8, 9).$$

Berechnen Sie $d(v_1, v_2, v_3)$ nur mit dem Wissen, dass d eine 3-fache Linearform ist, die *alternierend* ist (d.h. $d(w_1, w_2, w_3) = 0$ falls es $i \neq j$ gibt mit $w_i = w_j$).

(b) Es sei $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $x \in K$. Wir betrachten die Vektoren

$$v_1 = (\overline{1}, \overline{1}, x), \quad v_2 = (\overline{1}, x, \overline{1}), \quad v_3 = (x, \overline{1}, \overline{1})$$

in K^3. Es sei d eine Determinantenform auf K^3 mit $d(e_1, e_2, e_3) = 1$.
Zeigen Sie: $d(v_1, v_2, v_3) = -(x - \overline{1})^2(x + \overline{2})$. Folgern Sie: $d(v_1, v_2, v_3) = 0$ genau dann, wenn $x \in \{\overline{1}, \overline{3}\}$ gilt.