LINEARE ALGEBRA II
3. PRÄSENZÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Aufgabe 1. Es sei K ein Körper und $d\colon K^3 \times K^3 \times K^3 \to K$ die Determinantenform, die $d(e_1, e_2, e_3) = 1$ erfüllt. Es seien $x_1, x_2, x_3 \in K$. Wir definieren $v_i = (1, x_i, x_i^2)$, $1 \leq i \leq 3$. Zeigen Sie:

$$d(v_1, v_2, v_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1).$$

Aufgabe 2. Es sei K ein Körper und e_1, e_2 die Standardbasis des K^2. Es sei V der Vektorraum der 2-fachen Linearformen auf K^2. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi\colon V \to \mathcal{M}_2(K), \quad \Phi(L) = (L(e_i, e_j))$$

linear ist und dass die Abbildung $\Psi\colon \mathcal{M}_2(K) \to V$ mit

$$\Psi(A)\colon K^2 \times K^2 \to K, \quad \Psi(A)(v, w) = v^T A w$$

invers zu Φ ist. Es sei nun $L\colon K^2 \times K^2 \to K$ eine 2-fache Linearform und $(a_{ij}) = \Phi(L)$. Zeigen Sie die folgenden Charakterisierung: L ist eine Determinantenform genau dann, wenn $a_{11} = 0 = a_{22}$ und $a_{12} = -a_{21}$

Aufgabe 3. Sei K ein Körper.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und d eine Determinantenform auf K^n mit $d(e_1, \dots, e_n) = 1$. Es sei $f\colon K^n \to K^n$ eine lineare Abbildung. Folgern Sie aus der Definition der Vorlesung:

$$\det(f) = d(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

(b) Es sei $f\colon K^3 \to K^3$ die lineare Abbildung mit

$$f(e_1) = e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 + e_3, \quad f(e_3) = e_1 + e_2.$$

Berechnen Sie $\det(f)$.

Aufgabe 4. Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K.

(a) Zeigen Sie, dass für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ und $\lambda \in K$ gilt $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
(b) Es seien $f, g\colon V \to V$ zwei nicht triviale Endomorphismen mit $f \circ g = 0$. Zeigen Sie, dass dann $\det(f) = 0$ und $\det(g) = 0$.