LINEARE ALGEBRA II
5. PRÄSENZÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Aufgabe 1. Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ eine obere Dreisecksmatrix, d.h. $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$. Zeigen Sie, dass für jedes $\lambda \in K$ gilt

$$\det(A - \lambda E_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda).$$

Folgern Sie, dass die Eigenwerte von A gerade $a_{11}, \dots, a_{nn}$ sind. Ist e_1 immer ein Eigenvektor zu a_{11}?

Aufgabe 2. Es sei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ und es sei A ähnlich zu $2A$. Zeigen Sie, dass 0 der einzige Eigenwert von A ist.

Aufgabe 3. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume zu A.

Aufgabe 4.

(a) Es sei K ein Körper und

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(K)$$

Wir betrachten $f = (2 - X)(3 - X) \in K[X]$. Zeigen Sie: $f(A) = 0$.

(b) Zeigen Sie, falls A diagonalisierbar ist, so gibt es $f = \prod_{i=1}^{t}(\lambda_i - X) \in K[X]$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ und $f(A) = 0$.