LINEARE ALGEBRA II
6. PRÄSENZÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Aufgabe 1. Es sei $K = \mathbb{R}$. Finden Sie jeweils zur Matrix A und B eine ähnliche Matrix, die in oberer Dreiecksform ist. Erklären Sie, warum C nicht trigonalisierbar ist (über $\mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie das charakteristische und das Minimalpolynom für folgende Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Folgern Sie, dass A und C und ebenso B und C nicht ähnlich sind. Warum sind A und B nicht ähnlich? (Hinweis: Falls A und B ähnlich sind, so auch $(A - 2E_5)^2$ und $(B - 2E_5)^2$, aber haben die beiden den gleichen Rang?)

Aufgabe 3. Es sei K ein Körper und es seien $p, q \in K[X]$ zwei Polynome, so dass es $a, b \in K[X]$ gibt mit

$$1 = ap + bq.$$

Es sei V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $(pq)(f) = 0$. Zeigen Sie:

$$V = \operatorname{Ker}(p(f)) \oplus \operatorname{Ker}(q(f))$$

Hinweis: Nach Annahme gilt dann $v = (a(f) \circ p(f))(v) + (b(f) \circ q(f))(v)$ für jedes $v \in V$.

Aufgabe 4. Es sei K ein Körper und $p, q \in K[X]$ zwei nicht konstante Polynome. Für $r, s \in K[X]$ schreiben wir $r|s$ wenn es ein $t \in K[X]$ gibt mit $s = tr$. Wir nennen ein Polynom s normiert, wenn 1 der Koeffizient vor $X^{\mathrm{grad}(s)}$ ist.

Wir definieren $\mathrm{ggT}(p, q)$ als das *normierte* Polynom g maximalen Grades, das sowohl $g|p$ als auch $g|q$ erfüllt.

(a) Zeigen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus, dass $\mathrm{ggT}(p, q)$ eindeutig definiert ist und dass es $a, b \in K[X]$ gibt mit $\mathrm{ggT}(p, q) = ap + bq$.
(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ genau dann gilt, wenn es $a, b \in K[X]$ gibt mit $1 = ap + bq$.

Es sei $K = \mathbb{Q}$, berechnen Sie $\mathrm{ggT}(X^3 + 2X + 2, X^2 + X + 1)$ und finden Sie a, b wie in (a).
`https://de.wikipedia.org/wiki/Erweiterter_euklidischer_Algorithmus`