LINEARE ALGEBRA II
7. PRÄSENZÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Aufgabe 1. Es sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Es sei $p \in K[X]$. Zeigen Sie $\mathrm{Ker}(p(f))$ und $\mathrm{Im}(p(f))$ sind f-invariante Unterräume.
(b) Angenommen $V = U \oplus W$ und wir fixieren eine angeordnete Basis $(u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_t)$ von V mit $u_i \in U, w_j \in W$. Dann gilt U und W sind f-invariant genau dann, wenn
$$M(f; u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_t) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad A \in \mathcal{M}_s(K), B \in \mathcal{M}_t(K)$$
(c) Angenommen $p_f = \prod_{i=1}^t (\lambda_i - X)^{n_i}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Folgern Sie aus A3), A4) von PB6, dass gilt
$$V = \mathrm{Ker}(\lambda_1 \mathrm{id} - f)^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(\lambda_t \mathrm{id} - f)^{n_t}$$
und $U_i = \mathrm{Ker}(\lambda_i \mathrm{id} - f)^{n_i}$ ist f-invariant, $1 \leq i \leq t$.
(d) In der Situation von (c), zeigen Sie: $g_i := (\lambda_i \mathrm{id} - f)|_{U_i} \colon U_i \to U_i$ ist eine nilpotente lineare Abbildung. Dies erklärt, warum wir uns auf nilpotente lineare Abbildungen einschränken.

Aufgabe 2. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f^n = 0$ und $f^{n-1} \neq 0$. Sei $v \in V$ mit $f^{n-1}(v) \neq 0$. Zeigen Sie: $\{v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v)\}$ ist eine Basis von V (vgl. Vorlesung).
Berechnen Sie die darstellenden Matrizen
$$M(f; v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v)) \quad \text{und} \quad M(f; f^{n-1}(v), f^{n-2}(v), \dots, f(v), v).$$

Aufgabe 3. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{M}_n(K)$ und $p_M(X) = \det(M - XE_n) \in K[X]$. Der Satz von Cayley-Hamilton besagt, dass $p_M(M) = 0_n$ ist. Erklären Sie, warum
$$p_M(M) = \det(M - ME_n) = \det(0_n) = 0$$
kein Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton ist, falls $n > 1$ ist.

Hinweis: $\det(M - ME_n) \in K$.

Aufgabe 4. Es sei $f\colon \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4, f(v) = Av$ (s.u.). Berechnen Sie eine Basis für $\mathrm{Ker} f$ und ergänzen Sie diese zu einer von $\mathrm{Ker} f^2$. Finden Sie eine Basis, so dass B die darstellende Matrix von f ist.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$