Henning Krause
SS 2017

Lineare Algebra II
Probeklausur

Julia Sauter
Jan Geuenich

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note

Zugelassene Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt.

Diese Klausur enthält 16 Seiten. Überprüfen Sie dies. Lösen Sie die Klammerung der Seiten nicht auf. Ihre Lösungen tragen Sie auf den Seiten der Aufgabenstellung ein. Für Vorüberlegungen verwenden Sie das Konzeptpapier der letzten Blätter. Falls Sie weiteres Papier benötigen, fragen Sie die Klausuraufsicht. Bitte verwenden Sie keinen Rotstift.

Bitte geben Sie knappe aber zugleich hinreichend ausführliche Begründungen für Ihre Ergebnisse. Ihr Lösungsweg muss nachvollziehbar sein. Sie dürfen dabei auf Ergebnisse aus der Vorlesung verweisen, sollten diese aber klar benennen.

In den Multiple-Choice-Aufgaben erhalten Sie für jede richtig vorgenommene Markierung einen Punkt. Für jede nicht richtig vorgenommene Markierung wird ein Punkt abgezogen. Das Nichtmarkieren einer Aussage führt nicht zum Punktabzug. Bei negativer Gesamtpunktzahl in einer Multiple-Choice-Aufgabe werden 0 Punkte vergeben.

Name, Vorname:

In den folgenden beiden Multiple-Choice-Aufgaben entscheide man jeweils für jede der Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien A und B zwei $(n \times n)$-Matrizen über einem Körper K. Ferner sei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und w ein Eigenvektor von B zum Eigenwert μ.

		Wahr	Falsch
(a)	Es ist $\lambda\mu$ immer ein Eigenwert von AB.	☐	☐
(b)	Es ist λ^3 immer ein Eigenwert von A^3.	☐	☐
(c)	Ist A invertierbar, so ist v immer ein Eigenvektor von A^{-1}.	☐	☐
(d)	Es ist $\lambda - \mu$ immer ein Eigenwert von $A - B$.	☐	☐

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Seien V und W zwei endlichdimensionale unitäre Vektorräume. Außerdem sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und $f^*\colon W \to V$ die zu f adjungierte Abbildung.

		Wahr	Falsch
(a)	Es gilt immer $\operatorname{Ker}(f^*) + \operatorname{Im}(f) = W$.	☐	☐
(b)	Es gilt immer $(\operatorname{Ker}(f))^\perp + (\operatorname{Im}(f^*))^\perp = V$.	☐	☐
(c)	Für alle $v \in V \setminus \{0\}$ gilt immer $\langle v, f^*(f(v)) \rangle \neq 0$.	☐	☐
(d)	Die lineare Abbildung f^*f ist immer normal.	☐	☐

Name, Vorname:

Aufgabe 3 (2 + 2 + 4 Punkte):

Seien $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Matrix

$$A_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 0 & \nu \\ 0 & \nu & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})\,.$$

(a) Man zeige, dass $A_{\mu,\nu}$ genau dann invertierbar ist, wenn $\mu \neq 0$ oder $\nu \neq 0$ gilt.

(b) Man berechne das charakteristische Polynom $p_{A_{\mu,\nu}}$.

(c) Man berechne alle Eigenwerte von $A_{\mu,\nu}$ und zeige, dass $A_{\mu,\nu}$ diagonalisierbar ist.

Name, Vorname:

Aufgabe 4 (1 + 4 + 2 + 1 Punkte):

Wir betrachten $\mathbb{C}^4$ als unitären Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt. Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \in \ \mathbb{C}^4 \, .$$

(a) Man zeige, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

(b) Man bestimme das Orthonormalsystem, das unter Anwendung des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram–Schmidt auf v_1, v_2, v_3 entsteht.

(c) Man berechne die orthogonale Projektion von $v_2 + v_3$ auf $\mathcal{L}(v_1, v_2)$.

(d) Man bestimme das orthogonale Komplement von $\mathcal{L}(v_1)$ in $\mathbb{C}^4$.

Name, Vorname:

Aufgabe 5 (2 + 3 + 3 Punkte):

Seien K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n > 1$. Außerdem sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Man formuliere den *Satz von Cayley–Hamilton* für die Abbildung f.

(b) Man beweise die Existenz einer linearen Abbildung $g\colon V \to V$, die keine K-Linearkombination der Potenzen $\mathrm{id}_V = f^0, f^1, f^2, f^3, \ldots$ von f ist.

(c) Sei nun $K = \mathbb{Q}$ und $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ die lineare Abbildung, die durch die Vorschrift $A \mapsto A + A^T$ gegeben ist. Man bestimme das Minimalpolynom von f.

Name, Vorname:

Aufgabe 6 (2 + 6 Punkte):

Sei V ein Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Man gebe die Definition aus der Vorlesung wieder, wann f *nilpotent* genannt wird, und, unter welcher Bedingung ein Unterraum U von V f*-invariant* heißt.

(b) Sei nun f nilpotent mit $f^{n-1} \neq 0$ und seien U_1 und U_2 f-invariante Unterräume von V mit $V = U_1 \oplus U_2$. Man beweise, dass $U_1 = V$ oder $U_2 = V$ gelten muss.