Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien A und B zwei $(n \times n)$-Matrizen über einem Körper K. Ferner sei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und w ein Eigenvektor von B zum Eigenwert μ.

		Wahr	Falsch
(a)	Es ist $\lambda\mu$ immer ein Eigenwert von AB.	☐	☒
(b)	Es ist λ^3 immer ein Eigenwert von A^3.	☒	☐
(c)	Ist A invertierbar, so ist v immer ein Eigenvektor von A^{-1}.	☒	☐
(d)	Es ist $\lambda - \mu$ immer ein Eigenwert von $A - B$.	☐	☒

Begründungen:

(a) Es ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert von $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mu = 1$ ein Eigenwert von $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Allerdings ist 0 der einzige Eigenwert von $AB = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $0 \neq 1 = \lambda\mu$.

(b) Es gilt $A^3 v = \lambda^3 v$, sodass λ^3 ein Eigenwert von A^3 ist.

(c) Es gilt $v = A^{-1}(Av) = A^{-1}(\lambda v)$ und somit $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$.

(d) Es ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mu = 0$ ein Eigenwert von $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Allerdings ist $\lambda - \mu = 0$ kein Eigenwert von $A - B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Seien V und W zwei endlichdimensionale unitäre Vektorräume. Außerdem sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und $f^*\colon W \to V$ die zu f adjungierte Abbildung.

		Wahr	Falsch
(a)	Es gilt immer $\mathrm{Ker}(f^*) + \mathrm{Im}(f) = W$.	☒	☐
(b)	Es gilt immer $(\mathrm{Ker}(f))^\perp + (\mathrm{Im}(f^*))^\perp = V$.	☒	☐
(c)	Für alle $v \in V \setminus \{0\}$ gilt immer $\langle v, f^*(f(v)) \rangle \neq 0$.	☐	☒
(d)	Die lineare Abbildung f^*f ist immer normal.	☒	☐

Begründungen:

(a) Es ist $(\mathrm{Im}(f))^\perp + \mathrm{Im}(f) = W$ nach (V.3.6) und $(\mathrm{Im}(f))^\perp = \mathrm{Ker}(f^*)$ nach (V.5.5).

(b) Es ist $(\mathrm{Ker}(f))^\perp + \mathrm{Ker}(f) = V$ nach (V.3.6) und $(\mathrm{Im}(f^*))^\perp = \mathrm{Ker}(f)$ nach (V.5.5).

(c) Für $f = 0$ gilt $\langle v, f^*(f(v)) \rangle = 0$ für alle $v \in V$.

(d) Es ist $(f^*f)^* = f^*f$ selbstadjungiert, also insbesondere normal nach (V.6.2).

Aufgabe 3 (2 + 2 + 4 Punkte):

Seien $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Matrix

$$A_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 0 & \nu \\ 0 & \nu & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) .$$

(a) Man zeige, dass $A_{\mu,\nu}$ genau dann invertierbar ist, wenn $\mu \neq 0$ oder $\nu \neq 0$ gilt.

(b) Man berechne das charakteristische Polynom $p_{A_{\mu,\nu}}$.

(c) Man berechne alle Eigenwerte von $A_{\mu,\nu}$ und zeige, dass $A_{\mu,\nu}$ diagonalisierbar ist.

Lösung:

(a) Man berechnet leicht $\det(A_{\mu,\nu}) = -(\mu^2+\nu^2)$. Nun ist $A_{\mu,\nu}$ genau dann invertierbar, wenn $\det(A_{\mu,\nu}) \neq 0$ gilt, was wegen $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ äquivalent zu $\mu \neq 0$ oder $\nu \neq 0$ ist.

(b) Man berechnet $p_{A_{\mu,\nu}} = -x^3 + 2x^2 + (\mu^2 + \nu^2 - 1)x - (\mu^2 + \nu^2) \in \mathbb{C}[x]$.

(c) Man berechnet $p_{A_{\mu,\nu}} = (\lambda_+ - x)(\lambda_- - x)(1 - x)$ mit $\lambda_\pm = 1/2 \pm \sqrt{\mu^2 + \nu^2 + 1/4}$.
Die Eigenwerte von $A_{\mu,\nu}$ sind die Nullstellen von $p_{A_{\mu,\nu}}$, also λ_+, λ_- und 1.
Falls $\mu = 0$ und $\nu = 0$ gilt, ist $A_{\mu,\nu}$ diagonal und insbesondere diagonalisierbar.
Falls $\mu \neq 0$ oder $\nu \neq 0$ gilt, hat man $\lambda_- < 1 < \lambda_+$. Die (3×3)-Matrix $A_{\mu,\nu}$ besitzt in diesem Fall also 3 verschiedene Eigenwerte und ist folglich diagonalisierbar.

Aufgabe 4 (1 + 4 + 2 + 1 Punkte):

Wir betrachten $\mathbb{C}^4$ als unitären Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt. Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 .$$

(a) Man zeige, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

(b) Man bestimme das Orthonormalsystem, das unter Anwendung des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram–Schmidt auf v_1, v_2, v_3 entsteht.

(c) Man berechne die orthogonale Projektion von $v_2 + v_3$ auf $\mathcal{L}(v_1, v_2)$.

(d) Man bestimme das orthogonale Komplement von $\mathcal{L}(v_1)$ in $\mathbb{C}^4$.

Lösung:

(a) Mit $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ berechnet man $\det(v_1, v_2, v_3, e_4) = 1 \neq 0$. Hieraus folgt die lineare Unabhängigkeit von v_1, v_2, v_3.

(b) Das gesuchte Orthonormalsystem besteht aus den drei Vektoren c_1, c_2, c_3, die für $k \in \{1, 2, 3\}$ rekursiv durch $c_k = \frac{b_k}{|b_k|}$ und $b_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, b_j \rangle}{|b_j|^2} b_j$ gegeben sind.

Eine Rechnung liefert

$$b_1 = v_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_2 = v_2 - \frac{i}{2} b_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_3 = v_3 - \frac{3i}{2} b_1 + \frac{1}{3} b_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad c_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Sei $p_U \colon \mathbb{C}^4 \to U$ die orthogonale Projektion auf $U = \mathcal{L}(v_1, v_2)$. Dann gilt

$$p_U(v_2 + v_3) = p_U(v_2) + p_U(v_3) = v_2 + (v_3 - b_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 \\ -7i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Die drei Vektoren $w_1 = (1, -i, 0, 0)$, $w_2 = (0, 0, 1, 0)$, $w_3 = (0, 0, 0, 1)$ sind linear unabhängig und orthogonal zu v_1. Wegen $\dim \mathcal{L}(v_1)^\perp = \dim \mathbb{C}^4 - \dim \mathcal{L}(v_1) = 3$ lässt sich daraus $\mathcal{L}(v_1)^\perp = \mathcal{L}(w_1, w_2, w_3)$ schließen.

Aufgabe 5 (2 + 3 + 3 Punkte):

Seien K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n > 1$. Außerdem sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Man formuliere den *Satz von Cayley–Hamilton* für die Abbildung f.

(b) Man beweise die Existenz einer linearen Abbildung $g\colon V \to V$, die keine K-Linearkombination der Potenzen $\mathrm{id}_V = f^0, f^1, f^2, f^3, \ldots$ von f ist.

(c) Sei nun $K = \mathbb{Q}$ und $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ die lineare Abbildung, die durch die Vorschrift $A \mapsto A + A^T$ gegeben ist. Man bestimme das Minimalpolynom von f.

Lösung:

(a) Es gilt $p_f(f) = 0$, wobei p_f das charakteristische Polynom von f ist.

(b) Der Vektorraum W der K-linearen Abbildungen $V \to V$ hat die Dimension n^2.

Es ist zu zeigen, dass $U = \mathcal{L}(\mathrm{id}_V, f, f^2, f^3, \ldots)$ ein echter Unterraum von W ist, dass also $\dim U < \dim W = n^2$ gilt.

Es ist $U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k$ mit $U_k = \mathcal{L}(\mathrm{id}_V, f, f^2, f^3, \ldots, f^{k-1})$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton hat man nun $f^n = q(f)$ für ein Polynom q vom Grad kleiner n. Für alle $k \geq n$ ergibt sich wegen $f^k = f^n f^{k-n} = q(f) f^{k-n} \in U_k$ damit $U_{k+1} = U_k$.

Es folgt $U = U_n$ und somit $\dim U = \dim U_n \leq n < n^2$.

(c) Wegen $f^2(A) = f(A + A^T) = f(A) + f(A^T) = 2f(A)$ wird $p = x^2 - 2x = x(x-2)$ vom Minimalpolynom m_f geteilt. Nun zeigt

$$f\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = 0 \qquad \text{und} \qquad f\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = 2\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),$$

dass sowohl 0 als auch 2 ein Eigenwert von f ist. Es muss also $m_f = p$ gelten.

Aufgabe 6 (2 + 6 Punkte):

Sei V ein Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Man gebe die Definition aus der Vorlesung wieder, wann f *nilpotent* genannt wird, und, unter welcher Bedingung ein Unterraum U von V f*-invariant* heißt.

(b) Sei nun f nilpotent mit $f^{n-1} \neq 0$ und seien U_1 und U_2 f-invariante Unterräume von V mit $V = U_1 \oplus U_2$. Man beweise, dass $U_1 = V$ oder $U_2 = V$ gelten muss.

Lösung:

(a) Die Abbildung f heißt *nilpotent*, wenn es eine natürliche Zahl q mit $f^q = 0$ gibt. Ein Unterraum $U \subseteq V$ wird als f*-invariant* bezeichnet, wenn $f(U) \subseteq U$ gilt.

(b) Wähle $x \in V$ mit $f^{n-1}(x) \neq 0$ und $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ mit $x = x_1 + x_2$.

Es ist dann $f^{n-1}(x_1) + f^{n-1}(x_2) = f^{n-1}(x) \neq 0$, woraus folgt, dass $f^{n-1}(x_1) \neq 0$ oder $f^{n-1}(x_2) \neq 0$ gelten muss. Ohne Einschränkung sei $f^{n-1}(x_1) \neq 0$.

Wegen der f-Invarianz von U_1 liegen die n Vektoren $x_1, f(x_1), \ldots, f^{n-1}(x_1)$ alle in U_1. Außerdem sind sie nach (IV.5.2) linear unabhängig. Es folgt $U_1 = V$.