LINEARE ALGEBRA II
10. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Sei $V = \mathbb{C}[x]$. Für Polynome $p \in V$ bezeichnen wir mit $\partial_k p$ die k-te Ableitung von p. Man zeige, dass durch die Vorschrift $(p,q) \mapsto \langle p,q\rangle$ mit

$$\langle p,q\rangle \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (\partial_k p)(0) \cdot \overline{(\partial_k q)(0)}\,,$$

ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Sei V ein euklidischer Vektorraum. Außerdem sei $f\colon V \to V$ ein Isomorphismus, der *winkeltreu* ist, d.h. in der Notation der Vorlesung gelte für alle $v, w \in V \setminus \{0\}$

$$\theta(f(v), f(w)) = \theta(v,w)\,.$$

Man zeige, dass es eine positive Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $|f(v)| = \lambda|v|$ für alle $v \in V$ gibt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\iota\colon V \hookrightarrow V^{\mathbb{C}}$ die Einbettung in die komplexe Erweiterung. Man beweise, dass es für jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f\colon V \to \mathbb{C}$ eine eindeutig bestimmte $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f^{\mathbb{C}}\colon V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $f^{\mathbb{C}} \circ \iota = f$ gibt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^n$. Für eine Permutation σ von $\{1,2,\ldots,n\}$ betrachte man die lineare Abbildung $f_\sigma\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, die auf den Standardbasisvektoren durch die Vorschrift $e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$ gegeben ist. Man zeige, dass f_σ diagonalisierbar ist und jeder Eigenwert λ von f_σ eine *Einheitswurzel* ist, d.h. die Gleichung $\lambda^k = 1$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

(4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 27. Juni 2017, bis 10.15 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.