LINEARE ALGEBRA II
11. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Man bestimme die Orthonormalbasis des unitären Vektorraums $\mathbb{C}^4$ versehen mit dem Standardskalarprodukt, die aus der Basis

$$\big\{(1,0,1,i),(0,1,-1,0),(1,1,0,0),(0,0,-2i,1)\big\}$$

durch Anwendung des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram–Schmidt entsteht.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als euklidischen Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt.

(a) Man bestimme die orthogonale Projektion von $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ auf $\mathcal{L}((0,-1,1))$.

(b) Man bestimme die orthogonale Projektion von $(7,5,3) \in \mathbb{R}^3$ auf $\mathcal{L}((1,0,1),(0,1,0))$.

(je 2 Punkte)

Aufgabe 3. Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und seien U_1 und U_2 zwei Unterräume von V mit der Eigenschaft $U_1 \cap U_2^\perp = \{0\}$. Man beweise $\dim(U_2) \geq \dim(U_1)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $w\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die fast überall positive Werte annimmt. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]$ der Polynome versehen mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, das je zwei Polynomen $p, q \in V$ die folgende reelle Zahl zuordnet:

$$\langle p,q\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} p(t)q(t)w(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Man zeige, dass $\{1,x,x^2,\dots\}$ eine Basis von V ist, die kein Orthogonalsystem bildet.

Sei $\{e_0,e_1,e_2,\dots\}$ die Basis von V, die man aus $\{1,x,x^2,\dots\}$ durch das Orthonormalisierungsverfahren von Gram–Schmidt gewinnt. Es ist also $e_n = \frac{b_n}{|b_n|}$ mit $b_n = x^n - \sum_{i=0}^{n-1}\langle x^n, e_i\rangle\, e_i$.

(b) Man zeige für jedes Polynom $q = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \in V$ die Identität

$$b_n \;=\; q - \sum_{i=0}^{n-1}\langle q, e_i\rangle\, e_i\,.$$

(c) Man folgere für alle $n > 1$ die rekursive Beziehung

$$b_n = (x - \langle x e_{n-1}, e_{n-1}\rangle)\, b_{n-1} - \tfrac{|b_{n-1}|}{|b_{n-2}|}\langle x e_{n-1}, e_{n-2}\rangle\, b_{n-2}\,.$$

(d) Man berechne für die Wahl $w(t) = t^2$ die Polynome e_0, e_1, e_2, e_3.

(je 1 Punkt)

Abgabe: Dienstag, 4. Juli 2017, bis 10.15 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.

Zusatzaufgabe ***(Fortsetzung von Aufgabe 4)*****.**

(e) Man überlege sich, warum das Polynom e_n genau n verschiedene reelle Nullstellen besitzt, die alle im Intervall $[-1, 1]$ liegen.

(f) Sei nun $w \equiv 1$. In diesem Fall ist b_n als das n*-te Legendre-Polynom* bekannt. Man beweise die explizite Formel

$$\sqrt{\frac{2^{2n+1}}{2n+1}}\, e_n \;=\; \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((x-1)(x+1))^n \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k\,.$$