LINEARE ALGEBRA II
12. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als euklidischen Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt. Sei nun $U = \mathcal{L}(v_1)$ die Ursprungsgerade im $\mathbb{R}^3$, die durch den Punkt $v_1 = (1, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$ verläuft. Man ermittle eine Orthonormalbasis $\{v_2, v_3\}$ des orthogonalen Komplements $U^\perp$, sodass die geordnete Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ gleich orientiert ist wie die geordnete Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Wir betrachten den Vektorraum $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ der reellen $(n \times n)$-Matrizen als euklidischen Vektorraum mit dem Skalarprodukt $(A, B) \mapsto \langle A, B\rangle = \mathrm{Sp}(AB^T)$. Sei

$$U_+ = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T\right\} \qquad \text{und} \qquad U_- = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = -A^T\right\} .$$

Man beweise $U_+^\perp = U_-$ und $U_-^\perp = U_+$. Hieraus folgere man $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = U_+ \oplus U_-$ und bestimme explizit die orthogonalen Projektionen p_{U_+} und p_{U_-}.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei U ein Unterraum eines Vektorraums V mit Skalarprodukt, für den die zur kanonischen Inklusion $\iota_U \colon U \hookrightarrow V$ adjungierte Abbildung ι_U^* existiert. Man zeige, dass in diesem Fall ι_U^* mit der orthogonalen Projektion p_U übereinstimmt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Für endlichdimensionale euklidische Vektorräume V bezeichnen wir mit $\varphi_V \colon V \to V^*$ den für $x, y \in V$ durch $(\varphi_V(x))(y) = \langle x, y\rangle$ gegebenen Isomorphismus. Sei nun $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen euklidischen Vektorräumen und $f^* \colon W^* \to V^*$ die duale Abbildung von f. Man beweise, dass $\varphi_V^{-1} \circ f^* \circ \varphi_W$ die zu f adjungierte Abbildung ist.

(4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 11. Juli 2017, bis 10.15 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.