LINEARE ALGEBRA II
13. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{C}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ die auf der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ durch

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+2i \\ 1-i \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Man zeige, dass f normal ist und konstruiere eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$, die aus Eigenvektoren von f besteht.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ist genau dann normal, wenn A symmetrisch ist oder es eine orthogonale (2×2)-Matrix B mit $\det(B) = 1$ und ein Element $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $A = \lambda B$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Es sei $u \neq 0$ ein Vektor in einem euklidischen Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die *zu u orthogonale Spiegelung* ist die lineare Abbildung $s_u\colon V \to V$, die durch

$$s_u(v) \;=\; v - 2\frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} u$$

für $v \in V$ gegeben ist. Der Unterraum $\mathcal{L}(u)^\perp$ von V wird die *Spiegelungsebene* von s_u genannt. Man weise folgende Eigenschaften nach:

(a) $s_u(u) = -u$ und $s_u^2 = \mathrm{id}_V$.

(b) s_u ist selbstadjungiert und orthogonal.

(c) $\mathrm{Ker}(s_u + \mathrm{id}_V) = \mathrm{Im}(s_u - \mathrm{id}_V) = \mathcal{L}(u)$.

(d) $\mathrm{Ker}(s_u - \mathrm{id}_V) = \mathrm{Im}(s_u + \mathrm{id}_V) = \mathcal{L}(u)^\perp$.

(je 1 Punkt)

Aufgabe 4. Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und sei

$$\mathrm{O}(V) \;=\; \big\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \mid \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \text{ für alle } x, y \in V \big\}$$

die Menge der *orthogonalen Abbildungen* von V. Wir möchten einsehen, dass jede orthogonale Abbildung von V eine Verkettung von höchstens n Spiegelungen ist. Man zeige:

(a) Für alle $x \neq y$ in V mit $|x| = |y|$ gibt es ein $u \in V \setminus \{0\}$ mit $s_u(x) = y$ und $s_u(y) = x$.

(b) Für jede Abbildung $f \in \mathrm{O}(V)$ mit $f \neq \mathrm{id}_V$ gibt es $k \leq n$ und $u_1, u_2, \ldots, u_k \in V \setminus \{0\}$, sodass $f = s_{u_k} \circ \cdots \circ s_{u_2} \circ s_{u_1}$ gilt.

(1 + 3 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 18. Juli 2017, bis 10.15 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

Man berechnet $p_f = (1-x)(i-x)(3i-x)$ und sieht, dass f die drei Eigenwerte 1, i, $3i$ besitzt. Als Eigenvektoren von f findet man $b_1 = (1,1,1)$ zum Eigenwert 1, $b_2 = (1,0,-1)$ zum Eigenwert i und $b_3 = (1,-2,1)$ zum Eigenwert $3i$. Die Vektoren b_1, b_2, b_3 sind paarweise orthogonal. Durch Normieren erhält man eine Orthonormalbasis $\frac{1}{\sqrt{3}}b_1$, $\frac{1}{\sqrt{2}}b_2$, $\frac{1}{\sqrt{6}}b_3$ von $\mathbb{C}^3$, die aus Eigenvektoren von f besteht. Gemäß (V.5.12) ist f dann normal.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ berechnet man $AA^T = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$ und $A^TA = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$. Nun ist:

$$A \text{ normal} \Leftrightarrow AA^T = A^TA \Leftrightarrow c = b \vee (c = -b \wedge d = a) \Leftrightarrow A = A^T \vee A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Falls $A \neq A^T$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ gilt, ist $\det(A) = a^2 + b^2 > 0$ und für $\lambda = (\det(A))^{-\frac{1}{2}}$ ist die Matrix $B = \lambda^{-1}A$ orthogonal mit $\det(B) = 1$.

Gilt umgekehrt $A = \lambda B$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und eine orthogonale (2×2)-Matrix B mit $\det(B) = 1$, so ist A nach Aufgabe 1 (c) vom 11. Präsenzübungsblatt von der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Eine einfache Rechnung zeigt $s_u(u) = u - 2\frac{\langle u,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u = -u$ und für alle $v \in V$

$$s_u^2(v) = s_u\left(v - 2\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u\right) = s_u(v) - 2\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}s_u(u) = \left(v - 2\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u\right) + 2\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u = v\,.$$

(b) Die Abbildung s_u ist selbstadjungiert, da für alle $v, w \in V$

$$\begin{aligned} \langle s_u(v), w\rangle &= \left\langle v - 2\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u, w\right\rangle = \langle v,w\rangle - 2\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}\langle u,w\rangle \\ &= \langle v,w\rangle - 2\frac{\langle u,w\rangle}{\langle u,u\rangle}\langle v,u\rangle \\ &= \left\langle v, w - 2\frac{\langle u,w\rangle}{\langle u,u\rangle}u\right\rangle = \langle v, s_u(w)\rangle \end{aligned}$$

gilt. Wegen $s_u^2 = \mathrm{id}_V$ erhält man mit (V.7.5) (i) $\Leftrightarrow$ (vi), dass s_u orthogonal ist.

(c) Sei $p_+ = s_u + \mathrm{id}_V$ und $p_- = s_u - \mathrm{id}_V$. Offensichtlich ist $\mathrm{Ker}(p_+) = \mathcal{L}(u) = \mathrm{Im}(p_-)$.

(d) Da s_u selbstadjungiert ist, sind auch p_+ und p_- selbstadjungiert. Daher erhält man mit (V.5.5) und (c) die Identitäten $\mathrm{Ker}(p_-) = \mathrm{Im}(p_-)^\perp = \mathcal{L}(u)^\perp$. Unter Verwendung von (V.3.2), (V.5.5) und (c) sieht man auch $\mathrm{Im}(p_+) \subseteq (\mathrm{Im}(p_+)^\perp)^\perp = \mathrm{Ker}(p_+)^\perp = \mathcal{L}(u)^\perp$. Es gilt sogar $\mathrm{Im}(p_+) = \mathcal{L}(u)^\perp$, da $\mathrm{Im}(p_-) = \mathcal{L}(u)$ nach (c) und außerdem $\mathcal{L}(u)^\perp \cap \mathcal{L}(u) = \{0\}$ sowie $\mathrm{Im}(p_+) + \mathrm{Im}(p_-) = V$ ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Wähle $u = x - y$. Es ist $2\langle x-y, x\rangle - \langle x-y, x-y\rangle = \langle x-y, x+y\rangle = |x|^2 - |y|^2 = 0$. Man berechnet damit

$$s_u(x) \;=\; x - 2\tfrac{\langle x-y,x\rangle}{\langle x-y,x-y\rangle}(x-y) \;=\; x-(x-y) \;=\; y\,.$$

Nach Aufgabe 3 (a) folgt dann auch $s_u(y) = s_u^2(x) = x$.

(b) Wir beweisen die Aussage per Induktion nach $n = \dim(V)$. Der Fall $n = 0$ ist trivial.

Sei nun $n > 0$ und $\mathrm{id}_V \neq f \in \mathrm{O}(V)$. Dann gibt es $x \in V$ mit $y = f(x) \neq x$. Die Orthogonalität von f impliziert $|x| = |y|$. Nach (a) existiert $u_1 \in V \setminus \{0\}$, sodass $s_{u_1}(y) = x$ gilt.

Wegen der Orthogonalität von $g = f \circ s_{u_1}$, die aus Aufgabe 3 (b) folgt, und $g(y) = f(x) = y$ ist $U = \mathcal{L}(y)^\perp$ g-invariant. Die Einschränkung $g|_U \colon U \to U$ von g auf U ist orthogonal und per Induktion gilt $g|_U = s_{u_k} \circ \cdots \circ s_{u_2}$ für gewisse $u_2, \ldots, u_k \in U \setminus \{0\}$ mit $1 \leq k \leq n$ (wobei im Fall $k = 1$ das Produkt $s_{u_k} \circ \cdots \circ s_{u_2}$ als die Identität zu verstehen ist).

Nach Aufgabe 3 (d) ist $s_{u_i}(v) = v$ für alle $v \in U^\perp \subseteq \mathcal{L}(u_i)^\perp$ und $2 \leq i \leq k$. Demzufolge gilt auch $g(v) = v = (s_{u_k} \circ \cdots \circ s_{u_2})(v)$ für alle $v \in \mathcal{L}(y) \subseteq U^\perp$.

Insgesamt ist somit $g(v) = (s_{u_k} \circ \cdots \circ s_{u_2})(v)$ für alle $v \in \mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(y)^\perp$. Da $\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(y)^\perp = V$ gemäß (V.3.6) ist, folgt $f \circ s_{u_1} = g = s_{u_k} \circ \cdots \circ s_{u_2}$, also $f = f \circ s_{u_1}^2 = s_{u_k} \circ \cdots \circ s_{u_2} \circ s_{u_1}$.