LINEARE ALGEBRA II
2. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

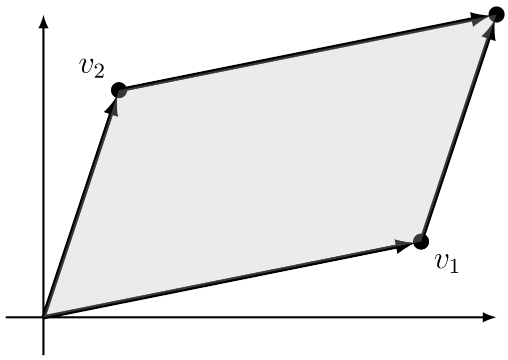
Aufgabe 1. Wir betrachten die Determinantenform $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die einem Paar (v_1, v_2) aus zwei Vektoren $v_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21})$ und $v_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22})$ die Zahl

$$d(v_1, v_2) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

zuordnet. In der Aufgabe soll eingesehen werden, dass $d(v_1, v_2)$ bis auf ein Vorzeichen der Flächeninhalt $f(v_1, v_2)$ des von v_1 und v_2 aufgespannten Parallelogramms ist.

(a) Zunächst begründe man anschaulich, warum f als Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ angesehen werden kann, die folgenden Axiomen genügt:
   (i) $f(e_1, e_2) = 1$ für die Standardbasis e_1, e_2 des $\mathbb{R}^2$.
   (ii) $f(\lambda v_1, v_2) = |\lambda| f(v_1, v_2) = f(v_1, \lambda v_2)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$.
   (iii) $f(v_1, v_2 + \lambda v_1) = f(v_1, v_2)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$.

(b) Man folgere nun $f(v_1, v_2) = |d(v_1, v_2)|$.



(je 2 Punkte)

Aufgabe 2. Es seien $n, r \in \mathbb{N}$ und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Die r-fachen Linearformen $d\colon V^r \to K$ bilden einen Vektorraum, den wir mit $\mathbf{L}^r(V)$ bezeichnen. Elemente $d \in \mathbf{L}^r(V)$ mit der Eigenschaft, dass für jedes Paar $1 \leq i < j \leq r$ und $v_i = v_j$ stets

$$d(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r) = 0$$

erfüllt ist, werden *alternierend* genannt. Eine Determinantenform auf V ist demnach per Definition eine alternierende n-fache Linearform auf V. Man zeige:

(a) Die Menge der alternierenden Elemente in $\mathbf{L}^r(V)$ bildet einen Unterraum $\mathbf{A}^r(V)$.
(b) Es gilt $\dim_K(\mathbf{L}^r(V)) = n^r$ und $\dim_K(\mathbf{A}^r(V)) = \binom{n}{r}$.

(je 2 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 2. Mai 2017, bis 10.15 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.

Aufgabe 3. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Man überprüfe:

(a) Für jede 2-fache Linearform $d \in \mathbf{A}^2(V)$ gilt $d(v_1, v_2) = -d(v_2, v_1)$ für alle $v_1, v_2 \in V$.
(b) Umgekehrt ist im Fall $\operatorname{char}(K) \neq 2$ eine 2-fache Linearform $d \in \mathbf{L}^2(V)$ bereits dann alternierend, wenn sie die Eigenschaft $d(v_1, v_2) = -d(v_2, v_1)$ für alle $v_1, v_2 \in V$ besitzt.
(c) Gilt die Aussage in (b) auch im Fall $\operatorname{char}(K) = 2$?

(2 + 1 + 1 Punkte)

Aufgabe 4. Für jede Permutation σ der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ beweise man die Formel

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} .$$

(4 Punkte)

Zusatzaufgabe. Sei K der Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p und sei $x \in K^\times$. Die Multiplikationsabbildung $a \mapsto xa$ definiert dann eine Permutation $\sigma_x \colon K \to K$. Man zeige, dass σ_x genau dann gerade ist, wenn die Gleichung $x = b^2$ durch ein Element $b \in K$ gelöst wird.

Hinweis: Man betrachte den Gruppenhomomorphismus $K^\times \to \{1, -1\} = \mathbb{Z}^\times$, der durch die Vorschrift $x \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma_x)$ gegeben ist.