LINEARE ALGEBRA II
4. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Man bestimme mithilfe der Cramerschen Regel die Lösung (x_1, x_2, x_3) in $\mathbb{Q}^3$ des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & = & -3 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & -10 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Man beweise, dass die Matrizen A und $A^T A$ äquivalent sind.

Hinweis: Man zeige zunächst $Ax = 0 \Leftrightarrow A^T Ax = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Für $(n \times n)$-Matrizen $A = (\alpha_{ij})$ über dem Körper K wird der Skalar

$$\mathrm{Sp}(A) := \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn} \in K$$

die *Spur* von A genannt. Man weise folgende Eigenschaften der Spur nach:

(a) $\mathrm{Sp}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{Sp}(A) + \mu \mathrm{Sp}(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ und $\lambda, \mu \in K$.

(b) $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$ für alle $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ und $B \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$.

(c) Sind $A \in \mathcal{M}_n(K)$ und $B \in \mathcal{M}_n(K)$ ähnlich, so gilt $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$.

(d) Gilt für zwei diagonalisierbare (2×2)-Matrizen A und B über K sowohl $\det(A) = \det(B)$ als auch $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$, so sind A und B bereits ähnlich.

Man entscheide jeweils ob die beiden Matrizen über den rationalen Zahlen ähnlich sind:

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} -7 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 12 \\ 2 & -7 & -6 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} -7 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 12 \\ 2 & -7 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

(je ein halber Punkt)

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und $p(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \cdots + \alpha_n X^n$ ein Polynom in $K[X]$. Weiterhin sei f eine lineare Transformation eines K-Vektorraums V, die den Eigenwert λ besitzt. Man zeige, dass dann $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(f)$ ist.

(4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 16. Mai 2017, bis 10.15 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.