LINEARE ALGEBRA II
5. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Man bestimme jeweils die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen und gebe für jeden Eigenwert seine algebraische und geometrische Vielfachheit an:

(a) $\begin{pmatrix} -6 & 0 & -8 & 10 \\ 9 & 2 & 9 & -11 \\ 5 & 0 & 7 & -6 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$ (b) $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{6} & \overline{4} & \overline{5} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$

(je 2 Punkte)

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $V = \mathcal{M}_n(K)$ der Vektorraum der $(n \times n)$-Matrizen über K und $A \in V$ eine Matrix. Für die durch $B \mapsto AB$ definierte lineare Abbildung $f\colon V \to V$ beweise man $p_f = (p_A)^n$.

(b) Sei $V = \{p \in K[X] \mid \operatorname{grad}(p) \leq n\}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n. Für die durch $p \mapsto (X+1) \cdot p'$ definierte lineare Abbildung $f\colon V \to V$ berechne man Determinante, Spur, charakteristisches Polynom, Eigenwerte und Eigenräume. Schließlich entscheide man, ob f diagonalisierbar ist.

Anmerkung: Für Polynome $p = \sum_{t=0}^{n} \alpha_t X^t$ bezeichnet p' die Ableitung $\sum_{t=0}^{n} t\alpha_t X^{t-1}$.

(je 2 Punkte)

Aufgabe 3. Seien $A, B \in \mathcal{M}_2(K)$ zwei Matrizen über einem Körper K mit demselben charakteristischen Polynom, das nicht in Linearfaktoren zerfällt. Man zeige, dass A und B ähnlich sind.

Hinweis: Man beweise zunächst $p_M(M) = M^2 - \operatorname{Sp}(M)M + \det(M)E_2 = 0$ für $M \in \mathcal{M}_2(K)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Für Matrizen $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ mit Koeffizienten in den komplexen Zahlen bezeichnen wir mit A^* die *zu A adjungierte Matrix*, die aus der zu A transponierten Matrix A^T durch komplexes Konjugieren aller Koeffizienten entsteht, d.h.

$$A^* = (\overline{\alpha_{ji}}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})\,.$$

Man zeige, dass alle Eigenwerte von Matrizen $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft $A = A^*$ reell sind und folgere hieraus für das charakteristische Polynom $p_A \in \mathbb{R}[X]$.

Hinweis: Betrachte das Produkt x^*Ax für Eigenvektoren x von A.

(4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 23. Mai 2017, bis 10.15 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.