LINEARE ALGEBRA II
6. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Man entscheide jeweils, ob folgende Matrizen trigonalisierbar sind. Immer wenn dies der Fall ist, ermittle man eine zur jeweiligen Matrix ähnliche obere Dreiecksmatrix:

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ (b) $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{3} & \overline{4} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ (d) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

(je 1 Punkt)

Aufgabe 2. Für (2×2)-Matrizen A über den reellen Zahlen beweise man folgende Aussagen:

(a) Gilt $(\mathrm{Sp}(A))^2 < 4\det(A)$, so ist A nicht trigonalisierbar.
(b) Gilt $(\mathrm{Sp}(A))^2 = 4\det(A)$, so ist A trigonalisierbar.
(c) Gilt $(\mathrm{Sp}(A))^2 = 4\det(A)$, so ist A diagonalisierbar genau dann, wenn A diagonal ist.
(d) Gilt $(\mathrm{Sp}(A))^2 > 4\det(A)$, so ist A diagonalisierbar.

(je 1 Punkt)

Aufgabe 3. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Wir betrachten den durch die Vorschrift $p \mapsto p(f)$ definierten Algebrenhomomorphismus

$$\phi_f\colon K[X] \to \mathrm{Hom}_K(V, V)\,.$$

(a) Man beweise die Existenz und die Eindeutigkeit eines Polynoms m_f der Form $\sum_{t=0}^{r} \beta_t X^t$ mit $\beta_r = 1$ in $\mathrm{Ker}(\phi_f)$, dessen Grad kleinstmöglich ist.

Das Polynom m_f wird das *Minimalpolynom* von f genannt.

(b) Man zeige mithilfe des Euklidischen Algorithmus, dass es für jedes Polynom $q \in \mathrm{Ker}(\phi_f)$ ein Polynom $h \in K[X]$ mit der Eigenschaft $q = hm_f$ gibt.

Insbesondere ist somit nach dem Satz von Cayley–Hamilton das charakteristische Polynom p_f ein Vielfaches des Minimalpolynoms m_f.

(c) Man bestimme explizit alle Polynome, die für das Minimalpolynom m_f infrage kommen, wenn die Identität $f^2 = f$ erfüllt ist.
(d) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in K$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von f. Man beweise, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn $m_f = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_r)$ gilt.

(je 1 Punkt)

Abgabe: Dienstag, 30. Mai 2017, bis 10.15 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper. Wir betrachten den Polynomring $K[X]$ und die Menge K^K aller Abbildungen von K nach K. Die *Auswertungsabbildung* $\varphi\colon K[X] \to K^K$ ordne jedem Polynom p die zugehörige Polynomfunktion $\varphi(p)\colon K \to K$ gegeben durch $x \mapsto p(x)$ zu. Man beweise:

(a) Falls K ein endlicher Körper ist, so ist φ surjektiv jedoch nicht injektiv.

Hinweis: Für die Surjektivität verwende man die Lagrangesche Interpolationsformel.

(b) Falls K ein unendlicher Körper ist, so ist φ injektiv jedoch nicht surjektiv.

(je 2 Punkte)