LINEARE ALGEBRA II
9. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $|\cdot|$. Man beweise für alle $x, y \in V$ folgende Identitäten:

(a) *(Parallelogrammgleichung)* $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$.

(b) *(Polarisationsformel)* $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2)$.

(c) *(Kosinussatz)* $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y \rangle$.

(d) *(Satz des Pythagoras)* $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2$, falls x und y orthogonal zueinander sind.

(je 1 Punkt)

Aufgabe 2. Es sei V ein unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und einer Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$. Man zeige, dass jeder Eigenwert der Matrix $(\langle e_i, e_j \rangle) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ reell und positiv ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Man beweise, dass für komplexe $(n \times n)$-Matrizen A und B durch

$$\langle A, B \rangle := \mathrm{Sp}(AB^*)$$

ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ erklärt ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Seien A, B zwei (2×2)-Matrizen über einem Körper K mit demselben charakteristischen Polynom und demselben Minimalpolynom. Man zeige, dass A und B ähnlich sind.

(4 Punkte)

Zusatzaufgabe. Man beweise, dass die Aussage in Aufgabe 4 ihre Richtigkeit behält, wenn man „(2×2)-Matrizen“durch „(3×3)-Matrizen“ersetzt. Stimmt sie auch noch für (4×4)-Matrizen?

Abgabe: Dienstag, 20. Juni 2017, bis 10.15 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.