Beweis des trigonometrischen Lemmas aus Serres "A Course in Arithmetic"

Lemma 1. *Für jedes ungerade $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein Polynom f vom Grad $\frac{m-1}{2}$ mit*

$$\frac{\sin(mx)}{\sin(x)} \;=\; f(\sin^2(x))\,.$$

Explizit ist $f(t) = \sum_{k \text{ ungerade}} \binom{m}{k} (-t)^{\frac{k-1}{2}} (1-t)^{\frac{m-k}{2}}$.

Beweis. Die eulersche Formel liefert

$$i\sin(mx) + \cos(mx) \;=\; e^{i(mx)} \;=\; (e^{ix})^m \;=\; (i\sin(x)+\cos(x))^m\,.$$

Nutzt man den binomischen Lehrsatz $(i\sin(x)+\cos(x))^m = \sum_k \binom{m}{k} i^k \sin^k(x)\cos^{m-k}(x)$, so erhält man für den Imaginärteil die Formel

$$\begin{aligned}\sin(mx) \;&=\; \textstyle\sum_{k \text{ ungerade}} \binom{m}{k} i^{k-1} \sin^k(x)\cos^{m-k}(x)\\ &=\; \textstyle\sum_{k \text{ ungerade}} \binom{m}{k} \sin(x)(-\sin^2(x))^{\frac{k-1}{2}}(1-\sin^2(x))^{\frac{m-k}{2}}\,.\end{aligned}$$

□

Lemma 2. *Für jedes ungerade $m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$4^{\frac{m-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} \sin^2(2\pi j/m) \;=\; m\,.$$

Beweis. Sei $\omega_j = 2\pi j/m$ und $\zeta_j = e^{i\omega_j} = i\sin(\omega_j) + \cos(\omega_j)$. Dann sind ζ_j und $\overline{\zeta_j}$ die Nullstellen des Polynoms $h(z) = \frac{z^m-1}{z-1} = z^{m-1} + z^{m-2} + \cdots + z + 1$ und es gilt

$$h(z) \;=\; \prod_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} (z-\zeta_j)(z-\overline{\zeta_j})\,.$$

Insbesondere ergibt sich für $z = 1$ wegen $(1-\zeta_j)(1-\overline{\zeta_j}) = 2 - 2\cos(\omega_j) = 4\sin^2(\omega_j/2)$

$$m \;=\; 4^{\frac{m-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} \sin^2(\omega_j/2) \;=\; 4^{\frac{m-1}{2}} \prod_{j'=1}^{\frac{m-1}{2}} \sin^2(\omega_{j'})\,,$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, dass $j \mapsto j'$ mit $j' = j/2$, falls j gerade ist, und $j' = (m-j)/2$, falls j ungerade ist, eine Permutation der Menge $\{1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}\}$ mit der Eigenschaft $\sin(\omega_j/2) = \sin(\omega_{j'})$ definiert. □

Lemma 3 (Trigonometrisches Lemma)**.** *Für jedes ungerade $m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\frac{\sin(mx)}{\sin(x)} \;=\; (-4)^{\frac{m-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} \left(\sin^2(x) - \sin^2(2\pi j/m)\right)\,.$$

Beweis. Sei $g(x) = \sin(mx)/\sin(x)$. Wegen $g(\omega_j) = 0$ für $1 \le j \le \frac{m-1}{2}$ sind $\sin^2(\omega_j)$ nach Lemma 1 paarweise verschiedene Nullstellen von f. Es genügt also zu zeigen, dass linke und rechte Seite der behaupteten Gleichung an der Stelle 0 übereinstimmen. Das ist aber wegen $\lim_{x\to 0} g(0) = f(0) = m$ und Lemma 2 der Fall. □