Henning Krause
Jan Geuenich

Algebra I
Klausur 7.2.2018 mit Lösungsvorschlag

WS 2017/18

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei G eine Gruppe mit einem Normalteiler N und einer Untergruppe H.

		Wahr	Falsch
(a)	Ist G abelsch und endlich erzeugt, so ist auch G/N endlich erzeugt.	☒	☐
(b)	Hat G außer H keine weitere Untergruppe der Ordnung $\lvert H\rvert < \infty$, so ist H ein Normalteiler in G.	☒	☐
(d)	Hat G keine nichttriviale echte Untergruppe, so ist G endlich.	☒	☐
(c)	Ist G einfach, so ist H einfach oder trivial.	☐	☒

Begründungen:

(a) Sind $g_1, \dots, g_n$ Erzeuger von G, so wird G/N von $g_1N, \dots, g_nN$ erzeugt.

(b) Für jedes $g \in G$ ist gHg^{-1} eine Untergruppe von G der Ordnung $|H|$ und stimmt deshalb nach Voraussetzung mit H überein. Folglich ist H ein Normalteiler.

(c) Angenommen $|G| = \infty$. Wähle $x \in G\setminus\{1\}$. Nach Voraussetzung ist dann $\langle x \rangle = G$, also $G \cong \mathbb{Z}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{Z}$ nichttriviale echte Untergruppen besitzt.

(d) Die alternierende Gruppe $G = A_5$ hat nach Satz 1.12.1 wegen $|A_5| = \frac{5!}{2} = 2^2 \cdot 15$ eine Untergruppe H mit $|H| = 2^2$. Aber Gruppen der Ordnung 2^2 sind nie einfach.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei L/K eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in L \setminus K$ algebraisch über K.

		Wahr	Falsch
(a)	Ist L ein Zerfällungskörper von $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$, so zerfällt $\mathrm{Irr}(\beta, K)$ in $L[X]$ in Linearfaktoren.	☒	☐
(b)	Es gilt $[K(\alpha+\beta) : K] \leq [K(\alpha) : K] \cdot [K(\beta) : K]$.	☒	☐
(c)	Es gilt $\frac{1}{42}[K(\alpha) : K] \leq [K(\alpha^{42}) : K]$.	☒	☐
(d)	Sind α und β separabel über K, so ist auch $\alpha^2 + \beta^{-1}$ separabel über K.	☒	☐

Begründungen:

(a) Nach Satz 3.5.11 ist L/K normal, sodass das Polynom $\mathrm{Irr}(\beta, K) \in K[X]$, welches die Nullstelle $\beta \in L$ besitzt, in $L[X]$ in Linearfaktoren zerfällt.

(b) Zunächst gilt $[K(\alpha+\beta) : K] \leq [K(\alpha, \beta) : K]$ und $[K(\alpha, \beta) : K(\beta)] \leq [K(\alpha) : K]$ wegen $K(\alpha + \beta) \subseteq K(\alpha, \beta)$ und $\mathrm{Irr}(\alpha, K(\beta)) \mid \mathrm{Irr}(\alpha, K)$. Hieraus ergibt sich die Behauptung mit der Gradformel $[K(\alpha, \beta) : K] = [K(\alpha, \beta) : K(\beta)] \cdot [K(\beta) : K]$.

(c) Das Minimalpolynom von α über $K(\alpha^{42})$ teilt $X^{42} - \alpha^{42}$, sodass mit der Gradformel $[K(\alpha) : K] = [K(\alpha) : K(\alpha^{42})] \cdot [K(\alpha^{42}) : K] \leq 42 \cdot [K(\alpha^{42}) : K]$ folgt.

(d) Nach Satz 3.6.12 ist die Körpererweiterung $K(\alpha, \beta)/K$ separabel. Insbesondere ist das Element $\alpha^2 + \beta^{-1} \in K(\alpha, \beta)$ separabel über K.

Aufgabe 3 (3 + 3 + 4 Punkte):

Sei $X = \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ und $G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) \,|\, n \in 2\mathbb{Z} \right\}$.

(a) Man zeige, dass G eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ ist.

(b) Man zeige, dass die Vorschrift

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), (a,b,c)\right) \;\mapsto\; (a,\, b+2an,\, an^2+bn+c)$$

eine Gruppenoperation $G \times X \to X$ liefert.

(c) Man bestimme für $x = (0,2,3) \in X$ die Bahn Gx und die Standgruppe G_x.

Lösung:

(a) Sicher liegt $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ in G. Mit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$ ist wegen $-n \in 2\mathbb{Z}$ auch

$$A^{-1} \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \;\in\; G$$

und mit $A' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & n' \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$ wegen $n+n' \in 2\mathbb{Z}$ auch

$$A'A \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 & n+n' \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \;\in\; G\,.$$

Nach dem Untergruppenkriterium ist G deshalb eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$.

(b) Mit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$ und $x = (a,b,c) \in X$ liegt auch

$$Ax \;=\; (a',b',c') \;=\; (a,\, b+2an,\, an^2+bn+c)$$

in X. Offensichtlich gilt $Ex = x$ und für $A' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & n' \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$ berechnet man

$$\begin{aligned} A'(Ax) &= (a'\,,\, b'+2a'n' \,,\, a'(n')^2+b'n'+c') \\ &= (a\,,\, b+2a(n+n')\,,\, a(n+n')^2+b(n+n')+c) \;=\; (A'A)x\,. \end{aligned}$$

(c) Für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$ ist $Ax = (0,\, 2,\, 2n+3)$. Es folgt $Gx = \{(0,2,k) \,|\, k \in 4\mathbb{Z}+3\}$ und wegen $Ax = x \Leftrightarrow (0,\, 2,\, 2n+3) = (0,2,3) \Leftrightarrow n = 0$ ist $G_x = \{E\}$.

Aufgabe 4 (3 + 3 + 3 + 3 Punkte):

Wir fassen $\mathbb{Q}$ als Unterkörper von $\mathbb{R}$ auf.

(a) Man beweise oder widerlege, dass der Ring $\mathbb{Q}[X]/(X^5 - 6X^2 + 3)$ ein Körper ist.

(b) Man bestimme alle Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[11]{3})/\mathbb{Q}$.

(c) Man bestimme das Minimalpolynom von $\pi - i \in \mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$.

(d) Man bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ des folgenden Systems von Kongruenzen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{2} \\ x &\equiv 2 \pmod{3} \\ x &\equiv 1 \pmod{5} \end{aligned}$$

Lösung:

(a) Der Ring $\mathbb{Q}[X]/(X^5 - 6X^2 + 3)$ ist ein Körper, denn $X^5 - 6X^2 + 3$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$ nach dem Eisensteinkriterium.

(b) Das Polynom $X^{11} - 3$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$ nach dem Eisensteinkriterium und besitzt $\sqrt[11]{3}$ als Nullstelle. Somit ist der Grad $[\mathbb{Q}(\sqrt[11]{3}) : \mathbb{Q}] = 11$ eine Primzahl und nach dem Gradsatz sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[11]{3})$ die einzigen Zwischenkörper.

(c) Das Polynom $(X - (\pi - i))(X - (\pi + i)) = X^2 - 2\pi X + \pi^2 + 1$ besitzt $\pi - i$ als Nullstelle und hat Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Wegen $\pi - i \notin \mathbb{R}$ ist es irreduzibel, also

$$\mathrm{Irr}(\pi - i, \mathbb{R}) \;=\; X^2 - 2\pi X + \pi^2 + 1\,.$$

(d) Offenbar ist $x = 11$ eine Lösung. Nach dem chinesischen Restsatz ist daher $11 + m\mathbb{Z}$ die Lösungsmenge mit $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Aufgabe 5 (5 Punkte):

Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei G eine nichttriviale p-Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Man zeige, dass es einen Vektor $v \in \mathbb{F}_p^n$ gibt, der Eigenvektor von jeder Matrix in G ist.

Lösung:

Wir betrachten die durch Matrizenmultiplikation gegebene Wirkung $G \times \mathbb{F}_p^n \to \mathbb{F}_p^n$. Gemäß Aufgabe 5.3 (a) ist die Anzahl der Fixpunkte dieser Wirkung modulo p kongruent zu $|\mathbb{F}_p^n| = p^n \equiv 0$. Da $0 \in \mathbb{F}_p^n$ ein Fixpunkt ist, muss es wegen $p > 1$ mindestens einen weiteren Fixpunkt $v \in \mathbb{F}_p^n$ geben.

Alternativlösung:

Nach den Sylowsätzen (Satz 1.12.1) liegt G in einer p-Sylowuntergruppe S von G. Aufgabe 7.3 zufolge gibt es eine geordnete Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{F}_p^n$ bezüglich derer die Elemente aus S durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt werden. Insbesondere ist also $v = v_1$ ein Eigenvektor aller Matrizen in $G \subseteq S$.

Aufgabe 6 (5 Punkte):

Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung und sei $\alpha \in L$ ein Element mit der Eigenschaft, dass $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ mit $\sigma \neq \mathrm{id}_L$ gilt.

Man beweise $L = K(\alpha)$.

Lösung:

Für $\sigma_1, \sigma_2 \in G = \mathrm{Gal}(L/K)$ ist $\sigma_1(\alpha) = \sigma_2(\alpha)$ äquivalent zu $(\sigma_2^{-1}\sigma_1)(\alpha) = \alpha$ und nach Voraussetzung dann zu $\sigma_2^{-1}\sigma_1 = \mathrm{id}_L$, also zu $\sigma_1 = \sigma_2$. Das zeigt $|G\alpha| = |G|$. Nach Satz 4.1.6 gilt nun $\mathrm{Irr}(\alpha, K) = \prod_{\beta \in G\alpha}(X - \beta)$ und $|G\alpha| = |G| = [L : K]$, sodass der Grad von α über K gleich $[K(\alpha) : K] = [L : K]$ ist. Es folgt $K(\alpha) = L$.