Henning Krause
Jan Geuenich

Algebra I
Probeklausur

WS 2017/18

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note

Zugelassene Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt.

Diese Klausur enthält 16 Seiten. Überprüfen Sie dies. Lösen Sie die Klammerung der Seiten nicht auf. Ihre Lösungen tragen Sie auf den Seiten der Aufgabenstellung ein. Für Vorüberlegungen verwenden Sie das Konzeptpapier der letzten Blätter. Falls Sie weiteres Papier benötigen, fragen Sie die Klausuraufsicht. Bitte verwenden Sie keinen Rotstift.

Bitte geben Sie knappe aber zugleich hinreichend ausführliche Begründungen für Ihre Ergebnisse. Ihr Lösungsweg muss nachvollziehbar sein. Sie dürfen dabei auf Ergebnisse aus der Vorlesung verweisen, sollten diese aber klar benennen.

In den Multiple-Choice-Aufgaben erhalten Sie für jede richtig vorgenommene Markierung einen Punkt. Für jede nicht richtig vorgenommene Markierung wird ein Punkt abgezogen. Das Nichtmarkieren einer Aussage führt nicht zum Punktabzug. Bei negativer Gesamtpunktzahl in einer Multiple-Choice-Aufgabe werden 0 Punkte vergeben.

Name, Vorname:

In den folgenden beiden Multiple-Choice-Aufgaben entscheide man jeweils für jede der Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei G eine endliche Gruppe mit einer Untergruppe H und einem Normalteiler N.

		Wahr	Falsch
(a)	Operiert G auf einer endlichen Menge X, so muss $\lvert G\rvert$ ein Teiler von $\lvert X\rvert$ sein.	☐	☐
(b)	Ist N eine 2-Sylowuntergruppe von G, so hat jedes Element in G/N ungerade Ordnung.	☐	☐
(c)	Ist G/N einfach, dann besitzt G abgesehen von N keinen echten nichttrivialen Normalteiler.	☐	☐
(d)	Sind N und G/N abelsch, so ist G stets abelsch.	☐	☐

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei K ein Körper.

		Wahr	Falsch
(a)	Der Ring $K[X,Y]/(1-XY)$ ist faktoriell.	☐	☐
(b)	Jede Körpererweiterung vom Grad 2 ist separabel.	☐	☐
(c)	Jede Körpererweiterung vom Grad 2 ist normal.	☐	☐
(d)	Der Ring $K[X,Y]$ ist ein Hauptidealring.	☐	☐

Name, Vorname:

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte):

Sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und sei Γ die Menge aller Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit Einträgen $a, d \in 1 + 2\mathbb{Z}$, $b, c \in 2\mathbb{Z}$ und $ad - bc = 1$.

(a) Man zeige, dass Γ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist.

(b) Man zeige, dass die Vorschrift

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

eine Gruppenoperation $\Gamma \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ liefert.

(c) Man bestimme die Standgruppe Γ_i von $i \in \mathbb{H}$.

(d) Man beweise oder widerlege, dass die Gruppe Γ einfach ist.

Name, Vorname:

Aufgabe 4 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte):

Wir fassen $\mathbb{Q}$ als Unterkörper von $\mathbb{R}$ auf.

(a) Man beweise oder widerlege, dass der Ring $\mathbb{R}[X]/(X^7 + 4X + 2)$ ein Körper ist.

(b) Man bestimme die Anzahl der Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{F}_{3^{30}}/\mathbb{F}_{3^2}$.

(c) Man bestimme das Minimalpolynom von $1 + \sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$.

(d) Man bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ des folgenden Systems von Kongruenzen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{4} \\ x &\equiv 2 \pmod{7} \\ x &\equiv 1 \pmod{11} \end{aligned}$$

Name, Vorname:

Aufgabe 5 (4 + 4 Punkte):

Sei G eine endliche Gruppe. Ferner sei p eine Primzahl und $n > 2$ eine natürliche Zahl.

(a) Man zeige, dass die Anzahl der Elemente in G der Ordnung n gerade ist.

(b) Angenommen G ist eine p-Gruppe und N ist ein Normalteiler in G der Ordnung p. Man beweise, dass N im Zentrum von G enthalten ist.

Name, Vorname:

Aufgabe 6 (4 + 4 Punkte):

Sei K ein Körper und L ein Zerfällungskörper von $f \in K[X]$ über K.

(a) Sei $n = \mathrm{grad}(f) \geq 0$. Man zeige, dass $n!$ vom Grad $[L : K]$ geteilt wird.

(b) Im Fall $\mathbb{Q} = K \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$ und $f = X^4 - 4$ bestimme man eine $\mathbb{Q}$-Basis von L.