ALGEBRA I
1. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Sei X eine Menge und G eine Gruppe. Wir bezeichnen mit G^X die Menge aller Funktionen $X \to G$. Ist auch X eine Gruppe, so schreiben wir $\operatorname{Hom}(X, G)$ für die Untermenge von G^X, die aus allen Gruppenhomomorphismen besteht.

Zeige:

(a) Die Menge G^X wird mit der durch punktweises Verknüpfen in G gegebenen Verknüpfung $\diamond$ zur Gruppe (d.h. $\varphi \diamond \psi \in G^X$ ist definiert durch $(\varphi \diamond \psi)(x) = \varphi(x)\psi(x)$ für alle $x \in X$).

(b) Ist X eine Gruppe und G abelsch, so ist $\operatorname{Hom}(X, G)$ eine Untergruppe von G^X.

(c) Die Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi(1)$ definiert eine Bijektion $\operatorname{ev}\colon \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\simeq} G$.

(d) Falls G abelsch ist, so ist ev ein Gruppenisomorphismus.

(je 1 Punkt)

Aufgabe 2. Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige:

(a) Ist U eine Untergruppe von H, so ist ihr Urbild $\varphi^{-1}(U)$ eine Untergruppe von G.

(b) Ist U eine Untergruppe von G, so ist ihr Bild $\varphi(U)$ eine Untergruppe von H.

(je 2 Punkte)

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) G ist abelsch.

(b) Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ definiert $g \mapsto g^k$ einen Gruppenendomorphismus $G \to G$.

(c) Die Vorschrift $g \mapsto g^2$ definiert einen Gruppenendomorphismus $G \to G$.

(d) Die Vorschrift $g \mapsto g^{-1}$ definiert einen Gruppenisomorphismus $G \to G$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Sei G die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ mit der Verknüpfung $\diamond\colon G \times G \to G$,

$$x \diamond y \;:=\; \frac{x+y}{1+xy}\,.$$

Zeige:

(a) $(G, \diamond)$ ist eine abelsche Gruppe.

(b) Die Vorschrift $x \mapsto \log(1+x) - \log(1-x)$ definiert einen Gruppenisomorphismus $G \to \mathbb{R}$.

(je 2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 19. Oktober 2017, bis 14 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.