ALGEBRA I
10. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Zur Lösung der ersten beiden Aufgaben dürfen die auf der nächsten Seite zusammengestellten Irreduzibilitätskriterien verwendet werden.

Aufgabe 1. Überprüfe die folgenden Polynome jeweils auf Irreduzibilität in $\mathbb{Q}[X]$:

(i) $X^2 + 1$

(ii) $5X^3 - 7X^2 + X + 3$

(iii) $2X^8 - 6X^5 + 24X^3 + 9X + 12$

(iv) $7X^4 + 5X^3 - 11X^2 + 3X + 13$

(je 1 Punkt)

Aufgabe 2. Beweise, dass $\frac{X^p-1}{X-1} = X^{p-1} + \cdots + X + 1$ für Primzahlen p irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei R ein Integritätsbereich und $K = \operatorname{Quot}(R[X])$. Zeige:

(a) Der *Ring der Laurentpolynome*

$$R\big[X, X^{-1}\big] \;:=\; \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n \in K \;\middle|\; a_n \in R \text{ für alle } n \text{ und } a_n = 0 \text{ für fast alle } n \right\}$$

bildet einen Teilring von K, der isomorph zur Lokalisierung $(R[X])_X$ ist.

(b) Der Ring $R[X,Y]/(1 - XY)$ ist ebenfalls isomorph zur Lokalisierung $(R[X])_X$.

Was rechtfertigt die Notation $R\big[X, X^{-1}\big]$?

(je 2 Punkte)

Aufgabe 4. Sei R ein faktorieller Ring und S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge in R, die nicht die Null enthält. Zeige, dass die Lokalisierung $S^{-1}R$ wieder ein faktorieller Ring ist.

Hinweis: Überprüfe, dass für jedes Primelement $p \in R$ das Element $\frac{p}{1} \in S^{-1}R$ genau dann eine Einheit ist, wenn p ein Element aus S teilt, anderenfalls jedoch $\frac{p}{1}$ ein Primelement ist.

(4 Punkte)

Zusatzaufgabe. Finde eine natürliche Bijektion zwischen der Potenzmenge der Menge aller Primzahlen und der Menge der Unterringe von $\mathbb{Q}$.

(2 Zusatzpunkte)

Abgabe: Donnerstag, 21. Dezember 2017, bis 14 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.

Irreduzibilitätskriterien. Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper $K = \mathrm{Quot}(R)$. Für

$$f \;=\; f_n X^n + \cdots + f_1 X + f_0 \;\in\; R[X]$$

vom Grad n mit Koeffizienten $f_0, f_1, \ldots, f_n \in R$ gelten dann:

(a) *(Nullstellentest)* Im Fall $n \in \{2,3\}$ ist das Polynom f genau dann irreduzibel in $K[X]$, wenn $f(\frac{r}{s}) \neq 0$ für jeden Teiler $r \in R$ von f_0 und jeden Teiler $s \in R$ von f_n gilt.

(b) *(Reduktionskriterium)* Ist p ein Primelement in R mit $p \nmid f_n$, sodass das Polynom

$$\bar{f} \;=\; \bar{f}_n X^n + \cdots + \bar{f}_1 X + \bar{f}_0 \quad \text{mit} \quad \bar{f}_i = f_i + (p)$$

irreduzibel in $R/(p)[X]$ ist, so ist das Polynom f irreduzibel in $K[X]$.

(c) *(Eisensteinkriterium)* Ist p ein Primelement in R mit $p \nmid f_n$ und $p \mid f_i$ für alle $0 \leq i < n$ und $p^2 \nmid f_0$, so ist das Polynom f irreduzibel in $K[X]$.

(d) Ist φ ein Ringautomorphismus von $K[X]$ (z.B. $\varphi|_K = \mathrm{id}_K$ und $\varphi(X) = X + \lambda$ mit $\lambda \in K$), so ist $\varphi(f)$ irreduzibel in $K[X]$ genau dann, wenn f irreduzibel in $K[X]$ ist.