ALGEBRA I
11. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Sei $\zeta_5 \in \mathbb{C}$ eine *primitive fünfte Einheitswurzel*, d.h. ein Erzeuger der Untergruppe

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^5 = 1\} \text{ von } \mathbb{C}^\times .$$

(a) Begründe, warum es sich bei ζ_5 um eine konstruierbare Zahl handelt.

(b) Skizziere kurz die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal. Markiere dabei das Verhältnis des goldenen Schnitts.

(je 2 Punkte)

Aufgabe 2. Wir betrachten $\mathbb{Q}$ als Unterkörper von $\mathbb{C}$. Zeige:

(a) Für $r, s \in \mathbb{Q}^\times$ gilt genau dann $\mathbb{Q}(\sqrt{r}) = \mathbb{Q}(\sqrt{s})$, wenn $\frac{r}{s}$ ein Quadrat in $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Sind m und n teilerfremde natürliche Zahlen, so gilt $\mathbb{Q}\big(\sqrt[m]{2}, \sqrt[n]{3}\big) = \mathbb{Q}\big(\sqrt[m]{2} \cdot \sqrt[n]{3}\big)$.

(je 2 Punkte)

Aufgabe 3. Sei L/K eine Körpererweiterung. Zeige, dass L/K genau dann algebraisch ist, wenn jeder Unterring R von L, der K enthält, ein Körper ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung und sei $\alpha \in L$. Zeige, dass das Minimalpolynom von α über K mit dem Minimalpolynom der K-linearen Abbildung $L \to L$, die durch Multiplikation mit α gegeben ist, übereinstimmt.

(4 Punkte)

Zusatzaufgabe. Zeige, dass sich der Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ genau dann mit Zirkel und Lineal dritteln lässt, wenn das Polynom $X^3 - e^{i\alpha}$ eine Nullstelle in $\mathbb{Q}(e^{i\alpha})$ besitzt.

(2 Zusatzpunkte)

Abgabe: Donnerstag, 18. Januar 2018, bis 14 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.