ALGEBRA I
12. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Sei p eine Primzahl. Bestimme für jede der folgenden Körpererweiterungen ihren Grad und entscheide jeweils, ob sie separabel und ob sie normal ist:

(i) $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$

(ii) $\mathbb{F}_p(X)/\mathbb{F}_p(X^p)$

(iii) $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}\right)/\mathbb{Q}$

(iv) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)/\mathbb{Q}$

(je 1 Punkt)

Aufgabe 2. Seien M/L und L/K Körpererweiterungen. Beweise oder widerlege jeweils:

(a) Ist M/K separabel, so sind auch M/L und L/K separabel.

(b) Ist M/K normal, so sind auch M/L und L/K normal.

(c) Sind M/L und L/K separabel, so ist auch M/K separabel.

(d) Sind M/L und L/K normal, so ist auch M/K normal.

(je 1 Punkt)

Aufgabe 3. Sei L/K eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in L$ algebraisch über K. Beweise, dass $\operatorname{Irr}(\alpha, K)$ genau dann irreduzibel über $K(\beta)$ ist, wenn $\operatorname{Irr}(\beta, K)$ irreduzibel über $K(\alpha)$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Bestimme in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{Q}$ explizit alle Elemente der Menge $\operatorname{Alg}_{\mathbb{Q}}(L_a, \mathbb{C})$ für den Zerfällungskörper $L_a \subseteq \mathbb{C}$ von $X^4 - a$ über $\mathbb{Q}$.

(4 Punkte)

Zusatzaufgabe. Zeige, dass eine algebraische Körpererweiterung L/K genau dann einfach ist, wenn sie nur endlich viele Zwischenkörper besitzt.

(2 Zusatzpunkte)

Abgabe: Donnerstag, 25. Januar 2018, bis 14 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.