ALGEBRA I
3. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Wir betrachten die folgenden invertierbaren komplexen Matrizen:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Zeige, dass die Menge $Q_8 = \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ bildet.

(b) Überprüfe die Identitäten $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -E$.

(c) Stelle die Gruppentafel von Q_8 auf.

(d) Bestimme alle Untergruppen von Q_8. Welche davon sind Normalteiler?

Die Gruppe Q_8 ist als die *Quaternionengruppe* bekannt.

(je 1 Punkt)

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe führen wir semidirekte Produkte ein und wollen außerdem einsehen, dass es bis auf Isomorphie genau 5 Gruppen der Ordnung 8 gibt.

(a) Seien N und H Gruppen und $\Phi\colon H \to \mathrm{Aut}(N), h \mapsto \Phi_h$, ein Gruppenhomomorphismus. Wir schreiben $N \rtimes_\Phi H$ für die Menge mit Verknüpfung $(N \times H, \diamond)$ gegeben durch

$$(n_1, h_1) \diamond (n_2, h_2) \ := \ (n_1 \Phi_{h_1}(n_2), h_1 h_2) \ .$$

Zeige, dass dieses sogenannte *semidirekte Produkt* $N \rtimes_\Phi H$ eine Gruppe ist, die $N \times \{1\}$ als Normalteiler und $\{1\} \times H$ als Untergruppe besitzt.

(b) Sei nun umgekehrt G eine Gruppe, die einen Normalteiler N und eine Untergruppe H mit den Eigenschaften $G = NH$ und $N \cap H = \{1\}$ besitzt. Unter diesen Umständen sagt man, G sei das *innere semidirekte Produkt* des Normalteilers N mit der Untergruppe H.

Zeige, dass durch $h \mapsto (n \mapsto hnh^{-1})$ ein Gruppenhomomorphismus $\Phi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ festgelegt wird, sodass $G \cong N \rtimes_\Phi H$ gilt.

(c) Zeige, dass jede achtelementige Gruppe, die ein inneres semidirektes Produkt eines nichttrivialen echten Normalteilers mit einer Untergruppe ist, isomorph zu einer der Gruppen

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \ , \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ , \quad D_8$$

sein muss, wobei D_8 die *Diedergruppe* bezeichnet, d.h. die vom Zykel $(1\ 2\ 3\ 4)$ und der "Spiegelung" $(1\,2)(3\,4)$ erzeugte Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_4$.

(d) Ist G eine achtelementige Gruppe, die zu keiner der drei in (c) aufgeführten Gruppen isomorph ist, so ist G isomorph zu $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ oder zur Quaternionengruppe Q_8.

Hinweis: Jede Untergruppe vom Index 2 ist ein Normalteiler.

(je 1 Punkt)

Abgabe: Donnerstag, 2. November 2017, bis 14 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.

Man sagt, dass ein surjektiver Morphismus $\pi\colon G \twoheadrightarrow H$ von Gruppen *spalte*, wenn er ein Rechtsinverses besitzt, d.h. wenn ein Morphismus $s\colon H \to G$ mit der Eigenschaft $\pi \circ s = \mathrm{id}_H$ existiert. In diesem Fall ist die Gruppe G das innere semidirekte Produkt von $\mathrm{Ker}(\pi)$ mit $\mathrm{Im}(s)$.

Aufgabe 3. Sei N ein Normalteiler der endlichen abelschen Gruppe G. Zeige, dass die kanonische Projektion $\pi\colon G \twoheadrightarrow G/N$ spaltet, wenn Ordnung $|N|$ und Index $|G/N|$ teilerfremd sind.

Hinweis: Wende die universelle Eigenschaft der Restklassengruppe G/N auf einen geschickt gewählten Endomorphismus $\varphi\colon G \to G$ mit der Eigenschaft $\pi \circ \varphi = \pi$ an.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Wir betrachten $\mathbb{Z}$ als additive Untergruppe von $\mathbb{Q}$. Zeige:

(a) Jedes Element in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ hat endliche Ordnung, aber die Ordnung von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist unendlich.

(b) Jede endlich erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Q}$ ist zyklisch.

(c) Jede endlich erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist zyklisch.

(d) Die Gruppen $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ sind nicht endlich erzeugt und paarweise nicht isomorph.

(je 1 Punkt)