ALGEBRA I
4. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Bestimme alle ganzzahligen Lösungen x des folgenden Systems von Kongruenzen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 2 \pmod{7} \\ x &\equiv 4 \pmod{9} \\ x &\equiv 6 \pmod{11} \end{aligned}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Seien m und n positive natürliche Zahlen. Wir bezeichnen mit $\mu_{m,n}$ den durch Multiplikation mit n gegebenen Endomorphismus $\overline{x} \mapsto \overline{nx}$ der Gruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\overline{x} = x + m\mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) Die Zahlen m und n sind teilerfremd.

(b) Die Gruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist zyklisch.

(c) Das Element $\overline{n}$ ist ein Erzeuger von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

(d) Die Abbildung $\mu_{m,n}$ ist ein Automorphismus.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Zeige:

(a) Jede Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe ist endlich erzeugt.

Hinweis: Verfahre per Induktion über die Anzahl der zur Erzeugung nötigen Elemente.

(b) Jede Untergruppe von $\mathbb{Z}^r$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}^s$ für ein eindeutig bestimmtes $s \leq r$.

(je 2 Punkte)

Aufgabe 4. Zeige, dass ein Gruppenendomorphismus $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ genau dann injektiv ist, wenn sein Kokern $\mathbb{Z}^n / \operatorname{Im}(f)$ endlich ist.

Hinweis: Beweise zunächst, dass die Injektivität der Abbildung f äquivalent zur Injektivität der $\mathbb{Q}$-linearen Abbildung $\hat{f}\colon \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n$ ist, die f fortsetzt.

(4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 9. November 2017, bis 14 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.