ALGEBRA I
5. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Bestimme für jede der folgenden endlich erzeugten abelschen Gruppen G die Zahlen $d_1, \dots, d_s \in \{2, 3, 4, \dots\}$ mit $d_i | d_{i+1}$ für $1 \leq i < s$ sowie die Primzahlpotenzen $q_1, \dots, q_t > 1$ mit

$$G \;\cong\; \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z} \;\cong\; \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/q_t\mathbb{Z}\,.$$

Sind die beiden Gruppen in (a) und (b) isomorph zueinander?

(a) $G = \mathbb{Z}/244\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/968\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7198\mathbb{Z}$

(b) $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/22\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2596\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7442\mathbb{Z}$

(je 2 Punkte)

Aufgabe 2. Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Wir bezeichnen mit A^* die Gruppe $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ bezüglich punktweiser Verknüpfung, die aus allen Gruppenhomomorphismen $A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ besteht.

Beweise, dass $x \mapsto \mathrm{ev}_x$ mit $\mathrm{ev}_x(\varphi) = \varphi(x)$ einen Gruppenisomorphismus $A \to (A^*)^*$ definiert. Ist auch A^* stets isomorph zu A?

(4 Punkte)

Wirkt eine Gruppe G auf eine Menge X, definieren wir für jedes $g \in G$ die Menge

$$X^g \;=\; \{x \in X \mid gx = x\}$$

der von g fixierten Elemente. Ein $x \in X$ mit $gx = x$ für alle $g \in G$ heißt *Fixpunkt* der Wirkung.

Aufgabe 3.

(a) Beweise für endliche G-Mengen X die Formel

$$|X| \;=\; \sum_{Gx \in G\backslash X} |G/G_x|\,.$$

(b) Zeige, dass jede Wirkung einer p-Gruppe auf eine endliche Menge, deren Kardinalität nicht von p geteilt wird, mindestens einen Fixpunkt besitzt.

(je 2 Punkte)

Aufgabe 4.

(a) Beweise für endliche Gruppen G, die auf eine Menge X wirken, die Formel

$$|G\backslash X| \;=\; \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|\,.$$

(b) Die Kärtchen eines Memoryspiels werden zufällig gemischt. Von wie vielen der Kärtchen ist zu erwarten, dass sie nach dem Mischen an der gleichen Position wie zuvor liegen?

(je 2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 16. November 2017, bis 14 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.