ALGEBRA I
7. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Beweise:

(a) Eine Gruppe G ist genau dann abelsch, wenn $G/\operatorname{Z}(G)$ zyklisch ist.

(b) Jede Gruppe der Ordnung p^2 für eine Primzahl p ist isomorph zu $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(je 2 Punkte)

Aufgabe 2. Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung $34969 = 11^2 \cdot 17^2$ abelsch ist.

Hinweis: Sind $M, N \trianglelefteq G$ mit $M \cap N = \{1\}$, so gilt $xy = yx$ für alle $x \in M$, $y \in N$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei p eine Primzahl und V ein endlichdimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorraum. Außerdem sei P eine p-Sylowuntergruppe von $\operatorname{GL}(V)$. Zeige, dass es eine Basis von V gibt bezüglich derer die Elemente von P gerade die Elemente von $\operatorname{GL}(V)$ sind, die durch obere Dreiecksmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Wir betrachten die spezielle unitäre Gruppe

$$G \;=\; \{U \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{C}) \mid U^*U = 1 \text{ und } \det(U) = 1\}$$

und den euklidischen Vektorraum

$$V \;=\; \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid A^* + A = 0 \text{ und } \operatorname{Sp}(A) = 0\}$$

mit dem reellwertigen Skalarprodukt $(A, B) \mapsto \operatorname{Sp}(AB^*)$. Zeige:

(a) Die Vorschrift $U \mapsto (A \mapsto UAU^*)$ liefert einen Gruppenhomomorphismus $G \xrightarrow{\pi} \operatorname{SO}(V)$.

(b) Jede endliche Untergruppe von G, die gerade Ordnung hat, enthält $\operatorname{Ker}(\pi) = \{\pm 1\}$.

Man kann zeigen, dass π surjektiv ist und endliche Untergruppen von G, die ungerade Ordnung haben, zyklisch sind. Was lässt sich dann über die endlichen Untergruppen von G sagen, wenn man die Klassifikation der endlichen Untergruppen von $\operatorname{SO}(V) \cong \operatorname{SO}(3)$ als bekannt voraussetzt?

(je 2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 30. November 2017, bis 14 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.