ALGEBRA I
9. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Wir betrachten folgenden Teilring der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big] \;=\; \Big\{x + yi\sqrt{5} \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{Z}\Big\}$$

Bestimme in $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ alle Einheiten und alle Zerlegungen des Elements 6 in irreduzible Faktoren.

Hinweis: Betrachte für $z = 1$ bzw. $z = 6$ und Zerlegungen $z = uv$ das Betragsquadrat $|z|^2$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Ein *diskreter Bewertungsring* ist ein faktorieller Ring R, der ein bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutiges irreduzibles Element p enthält. Zeige:

(a) Für jede Primzahl p bildet die Menge

$$\mathbb{Z}_{(p)} \;=\; \Big\{\frac{s}{t} \in \mathbb{Q} \mid s \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}\Big\}$$

einen Teilring von $\mathbb{Q}$, der ein diskreter Bewertungsring ist.

(b) Für jeden diskreten Bewertungsring R gibt es eine Abbildung $\nu\colon R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$, sodass der Ring R zusammen mit ν euklidisch ist.

(je 2 Punkte)

Das *Produkt* IJ zweier Ideale I und J in einem Ring R ist als das kleinste Ideal in R definiert, das alle Produkte xy mit $x \in I$ und $y \in J$ enthält, das bedeutet explizit

$$IJ \;=\; \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mid n \in \mathbb{N},\; x_1, \dots, x_n \in I,\; y_1, \dots, y_n \in J\right\}.$$

Aufgabe 3 (Chinesischer Restsatz für Ringe). Sei R ein Ring und seien $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_s$ Ideale in R, die paarweise *teilerfremd* sind, d.h. es gelte $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = R$ für alle $i \neq j$. Zeige:

(a) Der Ringhomomorphismus $R \to R/\mathfrak{a}_1 \times \cdots \times R/\mathfrak{a}_s$, der durch $r \mapsto (r + \mathfrak{a}_1, \dots, r + \mathfrak{a}_s)$ gegeben ist, ist surjektiv mit Kern $\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_s$. Folglich gibt es einen Isomorphismus

$$R/(\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_s) \;\cong\; R/\mathfrak{a}_1 \times \cdots \times R/\mathfrak{a}_s\,.$$

(b) Ist R kommutativ, so gilt außerdem

$$\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_s \;=\; \mathfrak{a}_1 \cdot \cdots \cdot \mathfrak{a}_s\,.$$

(je 2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 14. Dezember 2017, bis 14 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.

Aufgabe 4. Sei R ein Integritätsbereich und $p \in R$ mit $p \neq 0$. Zeige:

(a) Das Element p ist genau dann prim, wenn $R/(p)$ ein Integritätsbereich ist.

(b) Ist R faktoriell, so ist p genau dann prim, wenn p irreduzibel ist.

(je 2 Punkte)

Zusatzaufgabe. Finde Isomorphismen $\mathbb{R}[X]/(X^2-1) \cong \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{C}$ von Ringen.

(2 Zusatzpunkte)