DARSTELLUNGSTHEORIE
0. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

EXT-GRUPPEN BESCHRIEBEN DURCH YONEDA-ERWEITERUNGEN

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, n eine positive natürliche Zahl und setze $E_M = \operatorname{End}_{\mathcal{A}}(M)$.

(1) Für Objekte M und N in $\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit $\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,N)$ die "Menge" der Äquivalenzklassen exakter Folgen in $\mathcal{A}$ der Form

$$X\colon\; 0 \longrightarrow N \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow M \longrightarrow 0\,,$$

wobei zwei solche Folgen X und Y als äquivalent gelten, wenn sie in einem kommutierenden Diagramm in $\mathcal{A}$ mit exakten Zeilen folgender Gestalt auftauchen:

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
X\colon & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
& & & \| & & \uparrow & & & & \uparrow & & \| & & \\
& 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z_n & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
& & & \| & & \downarrow & & & & \downarrow & & \| & & \\
Y\colon & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_n & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

(2) Für alle Objekte F und G in $\mathcal{A}$ erhalten wir wohldefinierte Abbildungen

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,N) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(F,M) &\longrightarrow \operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(F,N)\,, \qquad (X,f) \longmapsto Xf\,,\\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(N,G) \times \operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,N) &\longrightarrow \operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,G)\,, \qquad (g,X) \longmapsto gX\,,
\end{aligned}$$

charakterisiert durch folgendes kommutierende Diagramm in $\mathcal{A}$, in dem das Quadrat oben rechts ein Pullback und das Quadrat unten links ein Pushout ist:

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc}
Xf\colon & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & (Xf)_1 & \longrightarrow & (Xf)_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & (Xf)_{n-1} & \longrightarrow & (Xf)_n & \longrightarrow & F & \longrightarrow 0 \\
& & & \| & & \| & & \| & & & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & \\
X\colon & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & M & \longrightarrow 0 \\
& & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow & & \| & & & & \| & & \| & & \| & \\
gX\colon & 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & (gX)_1 & \longrightarrow & (gX)_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & (gX)_{n-1} & \longrightarrow & (gX)_n & \longrightarrow & M & \longrightarrow 0
\end{array}$$

(3) Nun lässt sich $\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,N)$ mit der Struktur einer abelschen Gruppe versehen durch

$$(X,Y) \;\mapsto\; X+Y \;:=\; \nabla_N((X\oplus Y)\Delta_M) \;=\; (\nabla_N(X\oplus Y))\Delta_M$$

mit $\Delta_M\colon M \to M\oplus M$ der Diagonalen, $\nabla_N\colon N\oplus N \to N$ der Kodiagonalen und $X\oplus Y$ der direkten Summe $0 \to N\oplus N \to X_1\oplus Y_1 \to \cdots \to X_n \oplus Y_n \to M\oplus M \to 0$.

(4) Schließlich wird $\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,N)$ sogar zum E_N-E_M-Bimodul vermöge

$$(g,X,f) \;\mapsto\; gXf \;:=\; g(Xf) \;=\; (gX)f\,.$$

(5) Die Konstruktionen in (1)–(3) liefern zusammen den Bifunktor $\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$.

(6) Setze $\operatorname{Ext}^0_{\mathcal{A}}(M,N) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N)$. Allgemein haben wir dann für beliebige natürliche Zahlen m, n und Objekte L, M, N in $\mathcal{A}$ einen Homomorphismus von E_N-E_L-Bimoduln

$$\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,N) \otimes_{E_M} \operatorname{Ext}^m_{\mathcal{A}}(L,M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{m+n}_{\mathcal{A}}(L,N)\,, \qquad (X,Y) \longmapsto XY\,,$$

der für $m = 0$ oder $n = 0$ von den Abbildungen in (2) induziert wird und der andernfalls durch Zusammenfügen von X und Y wie folgt entsteht:

$$\begin{tikzcd} XY\colon\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_m \arrow[r] & L \arrow[r] & 0 \\ & & & & & M \arrow[ur] & & & & & \end{tikzcd}$$

(7) Für fixiertes $X\colon 0 \to N \to X_1 \to M \to 0$ bzw. fixiertes $Y\colon 0 \to M \to Y_1 \to L \to 0$ ergeben sich damit *Verbindungshomomorphismen*

$$\operatorname{Ext}^m_{\mathcal{A}}(L,M) \xrightarrow{\partial^{X,m}} \operatorname{Ext}^{m+1}_{\mathcal{A}}(L,N)\,, \qquad Y \longmapsto XY\,,$$
$$\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,N) \xrightarrow{\partial_{Y,n}} \operatorname{Ext}^{n+1}_{\mathcal{A}}(L,N)\,, \qquad X \longmapsto XY\,.$$

Diese wiederum induzieren lange exakte Folgen:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(L,N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(L,X_1) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(L,M) \xrightarrow{\partial^{X,1}} \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(L,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(L,X_1) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(L,M) \xrightarrow{\partial^{X,2}} \cdots$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(L,N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y_1,N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) \xrightarrow{\partial_{Y,1}} \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(L,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Y_1,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M,N) \xrightarrow{\partial_{Y,2}} \cdots$$

(8) Falls M eine projektive Auflösung P_* besitzt, erhalten wir einen Isomorphismus

$$\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,N) \xrightarrow{\simeq} H^n(\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P_*,N))\,, \qquad X \longmapsto \pi_X\,,$$

von E_N-E_M-Bimoduln durch die Wahl in $\mathcal{A}$ kommutierender Diagramme:

$$\begin{tikzcd} & P_n \arrow[r] \arrow[d, "\pi_X"'] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ X\colon\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_n \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(9) Falls N eine injektive Auflösung I^* besitzt, erhalten wir einen Isomorphismus

$$\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,N) \xrightarrow{\simeq} H^n(\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M,I^*))\,, \qquad X \longmapsto \iota_X\,,$$

von E_N-E_M-Bimoduln durch die Wahl in $\mathcal{A}$ kommutierender Diagramme:

$$\begin{tikzcd} X\colon\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X_n \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\iota_X"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I^{n-1} \arrow[r] & I^n & \end{tikzcd}$$