

AUSGEWÄHLTE KAPITEL DER ZAHLENTHEORIE

5. ÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Aufgabe 1. Es sei $m = a_n a_{n-1} \dots a_0$ eine Zahl im 10-er System, das heißt

$$m = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n.$$

Zeige zwei der folgenden vier Punkte:

- (1) m ist durch 11 teilbar genau dann, wenn $\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i$ durch 11 teilbar ist.
- (2) m ist durch 3 teilbar genau dann, wenn $\sum_{i=0}^n a_i$ durch 3 teilbar ist.
 m ist durch 9 teilbar genau dann, wenn $\sum_{i=0}^n a_i$ durch 9 teilbar ist.
- (3) m ist durch 4 teilbar genau dann, wenn $2a_1 + a_0$ durch 4 teilbar ist.
 m ist durch 8 teilbar genau dann, wenn $4a_2 + 2a_1 + a_0$ durch 8 teilbar ist.
- (4) Benutze die Teilbarkeitsregeln, um zu zeigen, dass 27720 durch 11, 8 und 9 teilbar ist.
Benutze die Teilbarkeitsregeln, um zu zeigen, dass 17050 nicht durch 66 teilbar ist.

Aufgabe 2. Finde alle Restklassen, die Lösungen der folgenden Kongruenzen sind.

- (1) $42x \equiv 21 \pmod{91}$,
- (2) $(-42)x \equiv 21 \pmod{91}$,
- (3) $41x \equiv 21 \pmod{91}$,
- (4) $41x \equiv 20 \pmod{91}$.

Aufgabe 3. Die sechste Legion schrieb um 50 vor Christus an Caesar (in deutsch):

NSP ZQOA UCJJAOBP KOFOBRCJJOP, OAPOB UBSEE KPL LAIG, OAPOB GJOAP MAH
XKPL

Entschlüssele die Nachricht. Es wurden den Buchstaben A bis Z die Zahlen 0 bis 25 zugeordnet und die Caesar Verschlüsselung mit der Vorschrift $y \equiv 3x + 2 \pmod{26}$ zur Verschlüsselung benutzt.

- Aufgabe 4.** (1) Schreibe eine Liste der Werte $[x]_5^2$ für $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
 (2) Folgere, dass es kein $[x]_5$ mit $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ gibt, so dass $[x]_5^2 + [3]_5 = [0]_5$ gilt.
 (3) Folgere nun ohne Primfaktorzerlegung, dass es kein $x \in \mathbb{Z}$ gibt mit $x^2 + 3 = 0$.
 (4) Benutze $[25]_5 = [0]_5$ und (3), um zu zeigen, dass es kein $x \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$x^2 + 25x + 3 = 0.$$

Abgabe: Freitag, 20. Mai 2016, bis 10.15 Uhr in der Vorlesung.