GRUPPEN UND SYMMETRIEN
6. ÜBUNGSBLATT

JULIA SAUTER

Abgabe bis Do, 21.11.19, 12:00h in den Postfächern Ihrer Tutoren im Kopierraum.

Aufgabe 6.1 (Anwendung des Satzes von Lagrange) Finden Sie alle Untergruppen der S_3 und schreiben Sie diese in einen Untergruppenverband. Benutzen Sie (bitte) die Notation auf der Rückseite.
(Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Langrange und das Korollar, dass alle Gruppen von Primzahlordnung zyklisch sind.)

Aufgabe 6.2

(a) **(Erzeuger in zyklischen Gruppen)**
  (1) Berechnen Sie $\varphi(9)$ und schreiben Sie die Elemente von $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$ auf.
  (2) Berechnen Sie die Ordnungen aller Elemente $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$ und folgern Sie, dass die Gruppe zyklisch ist mit zwei Erzeugern.
  (Allgemein gilt: Eine zyklische Gruppe mit m Elementen hat $\varphi(m)$ Erzeuger. Ist $G = \langle g \rangle$, so sind alle Erzeuger von der Form g^t mit t teilerfremd zu m.)

(b) **(Ordnungen in Produkten zyklischer Gruppen)**
  Es sei $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Berechnen Sie die Ordnungen (bezüglich $+$)
$$\mathrm{ord_G}(\overline{\mathrm{a}}, \overline{\mathrm{b}}, \overline{\mathrm{c}}) = \min\{\mathrm{n} > 0 \mid (\overline{\mathrm{na}}, \overline{\mathrm{nb}}, \overline{\mathrm{nc}}) = (\overline{0}, \overline{0}, \overline{0})\}$$
  der folgenden Elemente $g_1 = (\overline{0}, \overline{0}, \overline{1}), g_2 = (\overline{1}, \overline{1}, \overline{1}), g_3 = (\overline{2}, \overline{1}, \overline{3}), g_4 = (\overline{2}, \overline{1}, \overline{4})$.
  Bonus (+1P): Können Sie erklären, warum die folgende Regel stimmt?
$$\mathrm{ord_G}(\overline{\mathrm{a}}, \overline{\mathrm{b}}, \overline{\mathrm{c}}) = \mathrm{kgV}(\mathrm{ord}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(\overline{\mathrm{a}}), \mathrm{ord}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(\overline{\mathrm{b}}), \mathrm{ord}_{\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}}(\overline{\mathrm{c}}))$$

Aufgabe 6.3 (Steckbriefaufgaben, die aus Klassifikation endl. ab. Gruppen folgen)

(a) Sei G eine abelsche Gruppe der Ordnung 10. Zeigen Sie, dass G zyklisch ist.
(b) Sei G eine abelsche Gruppe der Ordnung $n = 108$.
  (1) Welche Möglichkeiten gibt es bis auf Isomorphie für die Gruppe G?
  (2) Falls zusätzlich gilt, dass die Ordnungen aller Elemente in G kleiner 5 sind, welche sind es dann?

Aufgabe 6.4 (multiplikative Restklassengruppen)

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.
(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist.
  (Hinweis: Ein möglicher Beweis benutzt die Klassifikation abelscher Gruppen der Ordnung $\varphi(16)$. Hier gibt es drei Isomorphieklassen, zwei davon muss man ausschliessen, um zu beweisen, dass es die dritte ist. Schliessen Sie aus, dass die Gruppe zyklisch ist und schliessen Sie aus, dass alle Elemente Ordnung 2 oder 1 haben.)

(Allgemein gilt: $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}$ für $n \geq 3$.)

Zur Vereinheitlichung der Notation und als Hilfestellung in Aufgabe 6.1 fixieren wir die folgende Notation (genannt Zykelnotation) für die Elemente in S_3:

$$S_3 = \{e = \mathrm{id}, (1,2), (2,3), (1,3), (1,2,3), (1,3,2)\},$$

wobei (i,j) die Abbildung bezeichnet, die i und j vertauscht und die verbleibende Zahl fixiert (beachten Sie $(i,j) = (j,i)$).
Die Abbildung (i,j,k) permutiert die Einträge wie folgt: $i \mapsto j \mapsto k \mapsto i$
(beachten Sie: $(i,j,k) = (k,i,j) = (j,k,i) \neq (i,k,j)$).
Man nennt diese Abbildungen *Zykel* (genauer 2-Zykel bzw. 3-Zykel, je nachdem wie viele Elemente permutiert werden).
Bei einer Abbildungsverknüpfung $f \circ g$ wird immer zuerst g angewendet und dann f, zum Beispiel gilt:

$$(1,2,3) \circ (1,2) = (1,3), \quad (1,2) \circ (2,3) = (1,2,3)$$

(Überlegen Sie sich, dass die Ordnung eines k-Zykels genau k ist.)