GRUPPEN UND SYMMETRIEN
1. PRÄSENZBLATT

JULIA SAUTER

Besprechung am Mittwoch, den 11.12.19 bei Erik Vinke im Tutorium.

Aufgabe PB 1.1 Es sei $\sigma \in S_n$ ein Produkt disjunkter Zykel und $G = \langle \sigma \rangle$. Wir betrachten die Operation von G auf der Menge $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ durch Permutation. Als Prototyp betrachten wir die Situation $\sigma = (1, 2, 4) \circ (5, 7) \in S_7$.

(a) Zeigen Sie, dass die Bahnen im Prototyp gerade $\{1, 2, 4\}$, $\{5, 7\}$, $\{3\}$, $\{6\}$ sind.
Allgemein, erklären Sie, warum die Bahnen genau die Supports der Zykel sind (hier müssen alle 1-Zykel auch mit berücksichtigt werden).

(b) Die Menge der Fixpunkte von σ ist $X^\sigma = \{x \in X \mid \sigma(x) = x\}$.
Zeigen Sie im Prototyp: $X^\sigma = \{3, 6\}$.
Allgemein, erklären Sie, dass dies gerade die Vereinigung der einelementigen Bahnen (d.h. Supports der 1-Zykel) unter der Operation der zyklischen Gruppe G ist.

(c) Wie sehen die Stabilisatoren an allen Elementen des Protoyps aus?
Allgemein: Betrachten Sie das Produkt σ' aller Zykel in σ ausser dem, bei dem das Element x im Support auftritt. Dann sollten Sie beobachten $G_x = \langle \sigma' \rangle$.

(d) Das Lemma von Burnside sagt, dass die Anzahl der Bahnen gleich der folgenden Formel ist

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| \,.$$

Rechnen Sie im Prototyp nach, dass diese Formel gerade die Anzahl der Zykel in der Faktorisierung von σ in disjunkte Zykel gibt. Finden Sie dazu erst die Mengen $X^\sigma, X^{\sigma^2}, X^{\sigma^3}, \ldots, X^{\sigma^5}$.

Aufgabe PB 1.2 Es seien $U = \{\mathrm{id}, (1, 2) \circ (3, 4), (1, 3) \circ (2, 4), (1, 4) \circ (2, 3)\}$ und $V = \{\mathrm{id}, (1, 2), (3, 4), (1, 2) \circ (3, 4)\}$ zwei Untergruppen von S_4 (-beide sind isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Wir betrachten die Einschänkungen auf die beiden Untergruppen von der kanonischen Operation von S_4 auf der Menge $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Berechnen Sie für beide Operationen alle Bahnen und Stabilisatoren.

(b) Berechnen Sie die Anzahl Bahnen bei beiden Operationen noch einmal mit dem Lemma von Burnside.

Aufgabe PB 1.3 Gegeben ist eine Perlenkette mit vier Perlen. Sie färben jede Perle in einer von zwei Farben. Auf wieviele Arten können Sie die Kette einfärben, wenn sie zwei Färbungen, die durch eine Drehung der Kette ineinander übergehen miteinander identifizieren? Beantworten Sie diese Frage zweimal:

(a) Indem Sie alle Möglichkeiten auflisten.

(b) Indem Sie mit dem Lemma von Burnside die Anzahl Bahnen der $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-Operation auf den 16 Färbungen ausrechnen.

Aufgabe PB 1.4 Wir betrachten die Untergruppe $U = \langle\sigma\rangle$, die von $\sigma = (1, 2, 3) \in S_4$ zyklisch erzeugt wird. Die Gruppe S_4 operiert diagonal auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ durch $g * (i, j) := (g(i), g(j))$ und wir betrachten nun die Einschänkung auf die Gruppe U.

(a) Finden Sie alle Bahnen und Stabilisatoren.
Überlegen Sie sich zuerst mit der Bahnengleichung, dass dies entweder ein oder dreielementige Mengen sein müssen.

(b) Berechnen Sie die Anzahl der Bahnen noch ein zweites Mal mit dem Lemma von Burnside.