GRUPPEN UND SYMMETRIEN
TRAININGSZETTEL I

JULIA SAUTER

Untergruppen und Gruppenhomomorphismen - abstrakte Beweisaufgaben.

Aufgaben zu Untergruppen: Es seien G eine Gruppe mit Einheit e und U und V zwei Untergruppen.

(1) Zeigen Sie, dass $U \cap V$ ebenfalls eine Untergruppe ist.

(2) Es sei $g \in G$, wir definieren:
$$gUg^{-1} := \{gug^{-1} \mid u \in U\}$$
Zeigen Sie, dass gUg^{-1} wieder eine Untergruppe ist.

(3) Es sei $C := \{g \in G \mid gx = xg\}$. Zeigen Sie, dass C eine Untergruppe von G ist.

Aufgaben zu Gruppenhomomorphismen: Es seien $f\colon G \to H$ und $g\colon H \to I$ zwei Gruppenhomomorphismen.

(4) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $g \circ f$ wieder ein Gruppenhomomorphismus ist.

(5) Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 3x$. Beweisen Sie, dass f ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

(6) Sei $x \in G$ endlicher Ordnung. Zeigen Sie: $\mathrm{ord(f(x))} \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\mathrm{ord(f(x))}$ ist ein Teiler von $\mathrm{ord(x)}$.
Hinweis: In VL10 wurde behandelt, dass für jede Gruppe G, $x \in G$ und $m \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:
$$x^m = e \Rightarrow \mathrm{ord_G(x)} \text{ teilt } \mathrm{m}$$