GRUPPEN UND SYMMETRIEN
TRAININGSZETTEL II

JULIA SAUTER

Aufgaben zu Kongruenzen und multiplikativen Restklassengruppen.

(1) Berechnen Sie die Ordnungen aller Elemente in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Zeigen Sie dann, dass es für jeden Teiler k von 12 genau eine Untergruppe dieser Ordnung gibt.
Hinweis: Alle Untergruppen von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sind zyklisch.

(2) Berechnen Sie $\varphi(12)$ und schreiben Sie die Elemente von $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ auf. Berechnen Sie die Ordnungen aller Elemente von $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ und beweisen Sie, dass die Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.

(3) Finden Sie alle Erzeuger der zyklischen Gruppe $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$.
Hinweis: Sie sollten $\varphi(\varphi(13))$ Erzeuger finden.

(4) Lösen Sie die simultane Kongruenz, das heißt finden Sie alle $x \in \mathbb{Z}$ so dass

$$x \equiv 17 (\text{mod } 12)$$
$$x \equiv -2 (\text{mod } 11)$$

(5) Berechnen Sie die Potenzen der Restklassen

$$\overline{11}^{2002} \in \mathbb{Z}/101\mathbb{Z}, \quad \overline{2}^{1234} \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}, \quad \overline{3}^{1234} \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$$

(6) Eine Lehrerin (mit einer sehr großen Klasse) wendet den RSA mit $N = 34$ und $e = 5$ an beim Geschenkewichteln. Sie nummeriert alle Schüler durch und gibt ihnen dann eine weitere verschlüsselte Nummer. Die ersten drei Schüler erhalten die Nummern $2, 4, 8$. Entschlüsseln Sie die Nummern, um herauszufinden, wem sie ein Geschenk machen sollen.

(7) Beweisen Sie ohne den Hauptsatz zu verwenden, dass $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ nicht isomorph sind.

(8) Finden Sie die Inversen der folgenden Elemente in den angegebenen multiplikativen Restklassengruppen:

$$10 + 121\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/121\mathbb{Z})^\times, \quad 17 + 100\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/100\mathbb{Z})^\times$$

(9) Es sei G eine abelsche Gruppe mit Ordnung 81 und die maximale Ordnung eines Elementes in G ist 9. Welche Möglichkeiten gibt es bis auf Isomorphie für G?
Hinweis: Benutzen Sie den Hauptsatz für endliche abelsche Gruppen.

(10) Es sei $G = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times$. Berechnen Sie die Ordnung des Elementes $(\overline{5}, \overline{2})$ in G.
Hinweis: Beachten Sie, dass die Gruppe bezüglich komponentenweiser Multiplikation definiert ist.