GRUPPEN UND SYMMETRIEN
1. ÜBUNGSBLATT

JULIA SAUTER

Abgabe: Bis zum 17.10.19, 12:00h im Kopierraum in V3 im Postfach ihres Tutors. Jede Aufgabe zählt 4 Punkte.

Aufgabe 1.1 (Beispiele und Nichtbeispiele von Gruppen). Welche der folgenden Mengen bildet zusammen mit der angegebenen Verknüpfung eine Gruppe?

(a) Die Menge $\{1\}$ zusammen mit der Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$.
(b) Die Menge $\{1, -1\}$ zusammen mit der Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$.
(c) Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zusammen mit der Mittelwertbildung $(x, y) \mapsto \frac{x+y}{2}$.
(d) Die Menge $\{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}\} \backslash \{0\}$ zusammen mit der Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$.

Aufgabe 1.2 (Verknüpfungstabelle). Die Menge $G = \{A, B, C, D, E\}$ bilde zusammen mit der Verknüpfung $*$ eine Gruppe. Die folgende Tabelle ist ein Teil der Verknüpfungstabelle. Fülle die fehlenden Felder aus (mit kurzen Begründungen).

$*$	A	B	C	D	E
A	A				
B		E	D	A	
C					
D				C	
E		C			

Aufgabe 1.3 (Symmetrische Gruppe auf drei Elementen). Sei S_3 die symmetrische Gruppe auf drei Elementen, d.h. die Menge der bijektiven Abbildungen $f \colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ zusammen mit der Verknüpfung $\circ$.

(a) Zeige, dass S_3 genau sechs Elemente $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ enthält.
(b) Gib die sechs Elemente in Form einer Wertetabelle an

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$
1						
2						
3						

(c) Stelle die Verknüpfungstabelle der Gruppe S_3 auf.

Aufgabe 1.4 (Beispiele/Nichtbeispiele von Untergruppen und Gruppenhomomorphismen).

(a) Welche der folgenden Teilmengen U ist in der angegebenen Gruppe G eine Untergruppe?
  (a1) Die Teilmenge $U = \{-1, 1\}$ in der Gruppe $G = (\mathbb{Z}, +)$.
  (a2) Die Teilmenge $U = \{3^n 5^m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ in der Gruppe $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
(b) Welche der angegebenen Abbildungen $f \colon G \to H$ sind Gruppenhomomorphismen? Falls es sich um einen Gruppenhomomorphismus handelt, wie sieht der Kern und das Bild aus?

Die folgenden Gruppen werden hier benutzt: $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +), \mathbb{R} = (\mathbb{R}, +), \mathbb{R}_{>0} = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $\mathbb{Q} \setminus \{0\} = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ und die triviale Gruppe $\{1\}$.

(b1) Die Inklusionsabbildung $f\colon \{1\} \to \mathbb{Z},\ f(1) = 1$.

(b2) Die Exponentialabbildung $f\colon \mathbb{R} \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot),\ f(x) = e^x$

(b3) Die Quadratabbildung $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = x^2$
und wie sieht es mit der Quadratabbildung $f\colon \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}, x \to x^2$ aus?

(b4) Sei $n \in \mathbb{Z}$ und f die Abbildung, die alles ver-n-facht $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = nx$.