# GRUPPEN UND SYMMETRIEN
# 2. ÜBUNGSBLATT

JULIA SAUTER

Abgabe bis Do., den 24.10.19 um 12:00h im Postfach des jeweiligen Tutors im Kopierraum.

**Aufgabe 2.1 (Gruppentafel der $\mathrm{D}_4$).** Wir betrachten die Diedergruppe $D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\}$ mit den Relationen $r^4 = 1 = s^2$ und $rs = sr^3$. Hier sind $1, r, r^2, r^3$ die Drehungen und $s, rs, r^2s, r^3s$ die Spiegelungen. Schreiben Sie die Gruppentafel von $\mathrm{D}_4$ auf.

**Aufgabe 2.2 (Untergruppenverband der $\mathrm{D}_4$).** Wir betrachten die Diedergruppe $\mathrm{D}_4$ wie in Aufgabe 2.1

(a) Zeigen Sie, dass $V_1 = \{1, r^2, s, r^2s\}$ und $V_2 = \{1, r^2, rs, r^3s\}$ Untergruppen von $\mathrm{D}_4$ sind. (Hinweis: Sie können zuerst die Gruppentafeln von $V_1$ und $V_2$ zeichnen und dann mit der Gruppentafel argumentieren, warum diese Untergruppen sind.)
(b) Finden Sie alle zyklischen Untergruppen von $\mathrm{D}_4$ (beachten Sie, dass unterschiedliche Elemente manchmal die gleiche zyklische Gruppe erzeugen) und fügen Sie sie zusammen mit $V_1, V_2$ und $\mathrm{D}_4$ in einen / den Untergruppenverband der $\mathrm{D}_4$ ein. [1]

**Aufgabe 2.3** Schreiben Sie die Gruppentafel von $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ auf. Berechnen Sie die dann die Ordnungen aller Elemente in dieser Gruppe und stellen Sie fest, welche Elemente die gleiche zyklische Untergruppe erzeugen.

**Aufgabe 2.4** Wir betrachten weiterhin die Gruppe $D_4$ aus Aufgabe 2.1. In dieser Aufgabe möchten wir die Untergruppen der Ordnung $4$ bis auf Isomorphie verstehen.

(a) Zeigen Sie, dass die Gruppen $V_1$ und $V_2$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sind.
(b) Zeigen Sie, dass die Untergruppe $\langle r \rangle = \{1, r, r^2, r^3\}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist.
(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist.

(Hinweis: Falls Sie nicht wissen, wie man diese Aufgabe angeht, zeichnen Sie die Gruppentafeln der involvierten Gruppen und vergleichen Sie diese.)

---

[1] Im Tutorium (bzw. vom Tutor) wird der Vollständigkeitsbeweis erklärt, dafür überlegen Sie sich folgende Schritte für eine Untergruppe $U$ von $\mathrm{D}_4$

(1) Falls $U$ nicht zyklisch ist, muss es eine Drehung $\neq 1$ und eine Spiegelung enthalten.
(2) Ist $r \in U$ und eine Spiegelung in $U$, so gilt schon $U = \mathrm{D}_4$.
Analog: Ist $r^3 = r^{-1} \in U$ und eine Spiegelung in $U$, so gilt schon $U = \mathrm{D}_4$.
(3) Ist $r^2 \in U$ und eine Spiegelung in $U$, $r \notin U, r^3 \notin U$, so ist $U$ entweder $V_1$ oder $V_2$.