GRUPPEN UND SYMMETRIEN
3. ÜBUNGSBLATT

JULIA SAUTER

Abgabe bis Do, 31.10.19, 12:00h in den Postfächern Ihrer Tutoren im Kopierraum.

Aufgabe 3.1 (Teilbarkeitsregeln für 9 und 11). Benutzen Sie die Rechenregeln für Kongruenzen, um die folgenden Teilbarkeitsregeln zu beweisen. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ im Dezimalsystem als eine Ziffernfolge $a_s a_{s-1} \cdots a_0$ mit $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ geschrieben.

(a) Die Zahl n ist genau dann durch 9 teilbar, wenn die Quersumme $a_s + a_{s-1} + \cdots a_0$ durch 9 teilbar ist.
(b) Die Zahl n ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^s a_s$ durch 11 teilbar ist.
(c) Argumentieren Sie (unter anderem) mit (a) und (b), um die eindeutige Primfaktorzerlegung von 19965 und 28350 zu finden.

Aufgabe 3.2 (Gruppentafel und Ordnungen der Elemente von $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times$).

(a) Stellen Sie die Gruppentafel der multiplikativen Restklassengruppe $((\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times, \cdot)$ auf. (Hinweis zur Erleichterung bei den Rechnungen: 1. Die Gruppe ist abelsch, also müssen Sie nur die halbe Tafel ausfüllen; 2. Falls $k \in \{10, 11, \dots, 19\}$ ist $20 - k \in \{1, 2, \dots, 10\}$ und $\overline{k} = \overline{-(20-k)} \in \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$, etwa anstelle von $\overline{19}$ kann man mit $\overline{(-1)}$ rechnen etc.)
(b) Berechnen Sie die Ordnungen aller acht Elemente in $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times$. Folgern Sie daraus, dass die Gruppe nicht zyklisch ist.

Aufgabe 3.3 (Das Lemma von Bézout). In dieser Aufgabe wenden wir das Lemma von Bézout an, um inverse Elemente in multiplikativen Restklassengruppen zu finden.

(a) Bestimme mithilfe des euklidischen Algorithmus ganze Zahlen a und b mit $97a + 68b = 1$.
(b) Was ist das zu $68 + 97\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/97\mathbb{Z})^\times$ inverse Element?
(c) Was ist das zu $97 + 68\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/68\mathbb{Z})^\times$ inverse Element?

Aufgabe 3.4 (Schnitte und Summen von Untergruppen von $\mathbb{Z}$)

(1) Zeigen Sie, dass $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$ gilt.
(Bonus +1P) Falls Sie allgemein beweisen, dass für $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:
$$n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = \mathrm{kgV(n, m)}\mathbb{Z}$$
(2) Zeigen Sie, dass $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$ gilt[1].
(Bonus +1P) Falls Sie allgemein beweisen, dass aus dem Lemma von Bezout für alle $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ folgt:
$$n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathrm{ggT(n, m)}\mathbb{Z}$$

[1] Die Definition der Summe der beiden Untergruppen lautet $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \{na + mb \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.