GRUPPEN UND SYMMETRIEN
7. ÜBUNGSBLATT

JULIA SAUTER

Abgabe bis Do, 28.11.19, 12:00h in den Postfächern Ihrer Tutoren im Kopierraum.

Aufgabe 7.1 (Linksnebenklassen)

(a) Es sei $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Finden Sie die zwei (verschiedenen) Linsnebenklassen von $U = \langle \overline{2} \rangle$ und die drei (paarweise verschiedenen) Linksnebenklassen von $V = \langle \overline{3} \rangle$.

(b) Es sei $G = S_4$ und $U = \{1, (1,2), (3,4), (1,2) \circ (3,4)\}$. Berechnen Sie alle Linksnebenklassen der Form

$$(i,j) \circ U, \quad i < j, \ \text{mit } i,j \in \{1,2,3,4\}$$

Welche von diesen beschreiben die gleiche Menge?

(c) Für G und U wie in (b) finden Sie die restlichen Linksnebenklassen (so dass Sie sechs paarweise verschiedene haben).

Aufgabe 7.2 (Darstellung als Produkt disjunkter Zykel) Es sei $G = S_7$. Schreiben Sie die folgenden Abbildungen

$$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) & \sigma(6) & \sigma(7) \end{smallmatrix}\right)$$

jeweils als ein Produkt disjunkter Zykel und berechnen Sie ihre Ordnung
Hinweis: Laut Vorlesung ist die Ordnung das kgV der Zykellängen der Faktoren.

$$\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 \end{smallmatrix}\right) \quad \sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{smallmatrix}\right) \quad \sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

Aufgabe 7.3 (Satz von Cayley) Es sei $G = S_3$ und wir fixieren die folgende Nummerierung der Elemente von G:

$$g_1 = e, \ g_2 = (1,2), \ g_3 = (2,3), \ g_4 = (1,3), \ g_5 = (1,2,3), \ g_6 = (1,3,2).$$

Nach dem Satz von Cayley ist die folgende Abbildung

$$\begin{aligned} &S_3 \to S_6 \\ &g_i \mapsto f_i \quad \text{definiert durch } f_i(j) = k, \text{ falls } g_i g_j = g_k \text{ gilt.} \end{aligned}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Schreiben Sie die f_i, $1 \leq i \leq 6$ als Produkt disjunkter Zykel.

Aufgabe 7.4 (Das Vorzeichen) In der Vorlesung wird für jede natürliche Zahl n das Vorzeichen von Permutationen als ein Gruppenhomomorphismus $\mathrm{sign}\colon \mathrm{S_n} \to \{-1, 1\}$ definiert.

(1.) Sei $n = 7$. Schreiben Sie $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ aus A7.2 als Produkt von Transpositionen und berechnen Sie $\mathrm{sign}(\sigma_1), \mathrm{sign}(\sigma_2), \mathrm{sign}(\sigma_3)$.

(2.) Beschreiben Sie die Menge der Fehlstellungen und berechnen Sie das Vorzeichen des k-Zykels $(1, 2, \dots, k)$ für $k = 2, 3, 4$.