PROSEMINAR GRUPPENWIRKUNGEN

DR. JULIA SAUTER

Gruppenwirkungen (oder Gruppenoperationen) findet man fast überall in der Mathematik. Jede Menge hat eine Operation durch die Gruppe der bijektiven Selbstabbildungen, auch Permutationen genannt. Betrachtet man einen Vektorraum, so hat man die allgemeine lineare Gruppe, die auf ihm wirkt. Nun kann man die Gruppenoperationen auf jede Untergruppe einschränken, insbesondere auf endliche Untergruppen. Dann kommt die Frage auf, werden Punkte oder Teilmengen unter dieser Operation festgelassen? Wenn es endlich viele sind, können wir dafür Zählformeln finden? Hierzu entwickeln wir in den ersten Vortägen die notwendige Theorie. Danach wenden wir uns speziellen interessanten Beispielen zu. In einem zweiten Teil beginnen wir die Darstellungstheorie von endlichen Gruppen. Zu einer gegebenen endlichen Gruppe studieren wir Wirkungen auf verschiedenen endlich dimensionalen Vektorräumen durch lineare Abbildungen.

Wichtiger Hinweis: Häufig geben wir verschiedene Quellen an und es ist die Aufgabe des Vortragenden, daraus einen Vortrag zu komponieren. Es ist manchmal auch sinnvoll, Dinge auszulassen. Es ist in jedem Fall die Aufgabe des Vortragenden, sinnvolle Beispiele auszuwählen. Bitte kommen Sie zu einer Vorbesprechung in der Woche vor dem Vortrag beim Organisator vorbei. Vorträge sollen 90 Minuten lang sein.

Vortrag 1 Bahnen und Stabilisatoren Definition einer Gruppe und von Gruppenwirkung, Bahn (oder Orbit) und Stabilisator (oder Isotropiegruppe oder Standgruppe). Beweise die Bahnenformel. Beispiele zur Erklärung sind zu finden.
Literatur: [5, 3.2.2, 3.2.5], [8, 4.1, 4.3], [9, 7.1,7.2] [13, Abschnitt 4.2, Satz 4.18]. Zur Inspirationen und für Beispiele können auch unkonventionelle Quellen herangezogen werden, etwa `https://www.youtube.com/watch?v=-BnLsRQpozU`.

Vortrag 2 Sätze über Untergruppen Definieren Sie Gruppenhomomorphismus. Als Beispiel kann gezeigt werden, dass D_3 (die Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks) isomorph zu S_3 ist.
Definieren Sie Untergruppe. Beweisen Sie den Satz von Lagrange und den Satz von Cayley. Der Satz von Cayley besagt, dass jede endliche Gruppe isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe S_n ist. Endliche Gruppen bis zur Ordnung 8 sollen (bis auf Isomorphie) besprochen werden.
Literatur: [5, 3.2.3], [13], [8, 4.2]

Vortrag 3 Das Lemma von Burnside Das Lemma von Burnside ist eine Formel zum Zählen der Bahnen auf einer Menge. Es soll bewiesen werden. Beispiele zur Erklärung sind zu finden.
Literatur: [1, 4.3], `http://www.ruhr-uni-bochum.de/lmi/lehre/materialien/dm/burnside.pdf`, [14, Thm 3.22], [16, 1.1]. Einen Blick Wert sollte auch die Vorlesung *Combinatorics* von Jacob Lurie sein, ab lecture 9 werden Gruppenoperationen behandelt: `http://www.math.harvard.edu/~lurie/155.html`

Vortrag 4 Polyas Formel soll erklärt und bewiesen werde. Dies benutzt das Lemma von Burnside. Polyas Formel zählt mögliche Färbungen von Objekten und hat deshalb besonders viele

Anwendungen.
Literatur: [1, 4.4], [16, 1.1 zweiter Teil], [14, nach Thm 3.22]. Einen Blick wert sollte auch die Vorlesung *Combinatorics* von Jacob Lurie sein, ab lecture 9 werden Gruppenoperationen behandelt: `http://www.math.harvard.edu/~lurie/155.html`

Vortrag 5 Konjugation Normalteiler und Quotientengruppen, Klassengleichung, Zentrum, die Konjugationsklassen der symmetrischen Gruppe.
Literatur: [5, 3.2.4,3.3,3.3.5], [8, 4.4, 4.5], [9, 7.3]

Vortrag 6 Matrizengruppen Sind Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe eines endlich dimensionalen Vektorraums. Sie wirken durch lineare Abbildungen auf diesem Raum. Hier sollen viele Beispiele kurz definiert werden Gl_n, Sl_n, O_n und parabolische Untergruppen von Gl_n, das sind Stabilisatorgruppen von Flahnen in dem Vektorraum.
Danach soll ein Detailstudium von $SO(2), SO(3), SU(2)$ und den Quaternionen $\mathbb{H}$ erfolgen. Hier soll bewiesen werden, dass die Automorphismengruppe der Quaternionen $SO(3)$ ist. Literatur dazu ist [3, Kapitel 4, Paragraph 5], [2, Chapter 9]. Für Ergebnisse zu den Quaternionen siehe zum Beispiel: [4, 4.4, Example 4.52]

Vortrag 7 Symmetriegruppen der platonischen Körper Führe die platonischen Körper ein. Beschreibe die Symmetriegruppe des Tetraeders [2, Chapter 1] und/oder des Würfels [17, Paragraph 1.2.3] (oder siehe [6, chapter 5]). Der Vortragende soll eine eigene Selektion aus den Folgenden treffen
(1) Die Ikosaedergruppe hat keine echten Normalteiler [3, Kapitel 6, Paragraph 2]
(2) Die endlichen Untergruppen der $SO(3)$ [3, Kapitel 5, Paragraph 9] oder [2, Chapter 19], [17, Chapter 3].
Eine historische Quelle für dieses Material ist Felix Klein *Vorlesungen über das Ikosaeder*, siehe [11].

Vortrag 8 Friesgruppen sind diskrete ebene Bewegungsgruppen, die eine Gerade fixieren. Bis auf Isomorphie gibt es sieben Friesgruppen. Siehe zum Beispiel [10, Paragraph 8.3], [7, I.1.3.], [12, Chapter 10], [6, chapter 22]

Vortrag 9 Ebene Bewegungsgruppen Dieser Vortrag betrachtet diskrete ebene Bewegungsgruppen, die nicht endlich sind und keine Gerade fixieren. Dies sind die sogenannten ebenen kristallographischen Gruppen (englisch: Wallpaper groups). Bis auf Isomorphie gibt es siebzehn davon.
Literatur: [3, Kapitel 5, Abschnitt 2,3,4]. Alternative Darstellung findet man in [17, Chapter 4], [2, chapter 25, chapter 26], [10, Paragraph 8.4], [7, I.1.4.], [12, chapter 11], [6, chapter 23].
Die Vorlesung von Ringel zu diesem Thema ist einen Blick wert
`https://www.math.uni-bielefeld.de/~ringel/diskret/diskret.htm`.

Vortrag 10 Die Gruppe $PSL_2(\mathbb{Z})$ und ihre Wirkung auf der komplexen Ebene Dies ist [16, Abschnitt 2.8]. 1. Es sollen erst positiv definite binäre quadratische Formel eingeführt werden und diese bis auf Äquivalenz beschrieben werden (Diskriminante). 2. Danach wird die Gruppenwirkung aus dem Titel betrachtet. 3. Nun wird der Zusammenhang der ersten beiden Punkte erkärt. Zur Möbiustransformation kann man auch in [6, chapter 4] gucken.

————————Ende Teil 1———————————-

Vortrag 11 Lineare Darstellungen von Gruppen Ab hier beginnt die Darstellungstheorie von Gruppen. Eine Darstellung einer Gruppe G besteht aus einem Vektorraum V und einem Gruppenhomomorphismus $\rho\colon G \to Gl(V)$. Wir betrachten nur endliche Gruppen G und komplexe endlich dimensionale Vektorräume V. Dies ist der einführende Vortrag in das Thema [15, Chapter 1].

Vortrag 12 Charaktertheorie I Zu einer Darstellung $\rho\colon G \to Gl(V)$ einer Gruppe definiert man den sogenannten Charakter, indem man mit die Abbildung mit der Spur Tr verknüpft $G \to Gl(V) \xrightarrow{Tr} \mathbb{C}$. Diese Abbildungen sind viel einfacher als die Darstellungen selbst und werden für die Bestimmung der Darstellung bis auf Isomorphie gebraucht. Die Charaktertheorie ist das Herz der Theorie. Wir teilen das Material in zwei aufeinander aufbauende Vorträge auf, Teil 1 [15, Chapter 2.1,2.2,2.3].

Vortrag 13 Charaktertheorie II Teil 2 [15, Chapter 2.4,2.5,2.6,2.7].

Vortrag 14 Induzierte Darstellungen Gegeben eine Darstellung einer Untergruppe, kann man eine Darstellung der Gruppe erhalten. Dieses Verfahren nennt man die induzierte Darstellung, siehe [15, Chapter 3].

Vortrag 15 Beispiele Hier sollen Charaktertafeln erstellt werden, dadurch versteht man dann alle Darstellungen einer Gruppe. Zum Beispiel kann man Material aus [15, Chapter 5] auswählen.

REFERENCES

[1] M. Aigner. *Diskrete Mathematik*. Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. [Vieweg Studies: Mathematics Course]. Friedr. Vieweg und Sohn, Wiesbaden, fifth edition, 2004.
[2] M. A. Armstrong. *Groups and symmetry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1988.
[3] M. Artin. *Algebra*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993. Translated from the 1991 English original by Annette A'Campo.
[4] A. Baker. *Matrix groups*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2002. An introduction to Lie group theory.
[5] J. Böhm. *Grundlagen der Algebra und Zahlentheorie*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2016.
[6] R. P. Burn. *Groups: a path to geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
[7] L. Fejes Toth. *Reguläre Figuren*. Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaft Budapest, 1965.
[8] G. Fischer. *Lehrbuch der Algebra*. Friedr. Vieweg und Sohn Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2008. mit lebendigen Beispielen, ausfhrlichen Erluterungen und zahlreichen Bildern.
[9] C. Karpfinger and K. Meyberg. *Algebra*. Heidelberg : Spektrum, Akad. Verl., 2009.
[10] L.C. Kinsey, T.E. Moore, and E. Prassidis. *Geometry and Symmetry*. John Wiley and Sons, Inc., 2011.
[11] F. Klein. *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*. Birkhäuser Verlag, Basel; B. G. Teubner, Stuttgart, 1993. Reprint of the 1884 original, Edited, with an introduction and commentary by Peter Slodowy.
[12] G. Martin. *Transformation geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. An introduction to symmetry.
[13] S. Rosebrock. *Geometrische Gruppentheorie*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, 2010. Ein Einstieg mit dem Computer. Basiswissen fr Studium und Mathematikunterricht, 2. aktualisierte Auflage.
[14] J. Rotmann. *An Introduction to the Theory of groups*. New York [u.a.] : Springer, 1995, 1995.
[15] J.-P. Serre. *Linear representations of finite groups*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Translated from the second French edition by Leonard L. Scott, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42.

[16] H. Siemon. *Anwendungen der elementaren Gruppentheorie in Zahlentheorie und Kombinatorik*. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1981. Klett Studienbücher Mathematik. [Klett Mathematical Textbooks].

[17] A.B. Sossinsky. *Geometries*. American Mathematical Society, 2012. Student Mathematical Library, Volume 64.