Einbettungen von Polarräumen

Diplomarbeit von Velena Reuter

betreut von Prof. Dr. Dr. Katrin Tent

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

13. August 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Punkt-Geraden-Räume **4**

3 Projektive Räume **6**

4 Affine Räume **10**

5 Polarräume **12**
5.1 Definitionen und Beispiele 12
5.2 Eigenschaften 13
5.3 Polaritäten 21
5.4 Polarräume assoziiert zu hermiteschen Formen 23
5.5 Polarräume assoziiert zu pseudo-quadratischen Formen 27

6 Einbettungen von Polarräumen **35**
6.1 Definitionen und ein Beispiel 35
6.2 Fortsetzung von Isomorphismen zweier Polarräume 38
6.3 Einbettungssatz von Veldkamp 39

A Anhang **61**
A.1 Rechnung 61
A.2 Rechnung 63

Literatur **63**

1 Einleitung

Ferdinand D. Veldkamp hat 1959 in [8] (Polar Geometry III) als erster ein axiomatisches System für Polarräume oder, wie er sie zunächst bezeichnete, Polargeometrien eingeführt. Ihm ist zusammen mit Jacques Tits in [7] und [8] die vollständige Charakterisierung der Polarräume vom Rang größer als zwei gelungen. Dabei hat J. Tits 1974 in [7] gezeigt, dass sich aus Polarräumen Gebäude eines bestimmten Typs konstruieren lassen und mehr noch, dass die Gebäude dieses Typs gerade dieser Konstruktion aus Polarräumen entsprechen. Während dieser Arbeit hat J. Tits die ursprünglich zehn Axiome von F. D. Veldkamp auf vier Axiome vereinfacht und diese Geometrie dann Polarraum genannt. Francis Buekenhout und Ernest Shult konnten schließlich in [2] zeigen, dass eine Inzidenzgeometrie, die zwei einfache Axiome erfüllt, genau den Eigenschaften der immer noch komplexen Definition von J.Tits genügt. Wir werden hier diese neue, einfachere Definition verwenden, die es ermöglicht einige Dinge anschaulicher darzustellen.
Der Hauptteil dieser Arbeit beschäftigt sich mit dem Beweis des Einbettungssatzes für Polarräume. Dieser Satz besagt, dass sich dicke Polarräume vom Rang größer oder gleich drei, deren maximale singuläre Unterräume desarguesch, also projektive Räume von Vektorräumen sind, in projektive Räume mit einer Polarität einbetten lassen, so dass sich die Kollinearitätsrelation des Polarraumes mit der Polarität verträgt. Aus diesem Satz folgt die schöne Aussage, dass diese Polarräume den Vektorräumen mit einer nicht ausgearteten hermiteschen oder pseudo-quadratischen Form entsprechen. Die Forderung, dass die maximalen singulären Unterräume desarguesch sind, ist nur für Polarräume vom Rang gleich drei nötig, ansonsten sind sie dies sofort.
Schon 1959 hat F. D. Veldkamp in [8] (Polar Geometry IV) einen Einbettungssatz für Polargeometrien formuliert und bewiesen. J. Tits gibt in [7] (8.21.) einen weiteren Beweis des Einbettungssatzes, der die Gebäudetheorie und den oben erwähnten Zusammenhang zwischen Polarräumen und Gebäuden verwendet. Genauer benutzt er die Sätze 4.1.1. sowie 4.1.2. und 4.16 aus [7] über Fortsetzungen von Isomorphismen von Gebäuden. Dadurch wird der Beweis im Vergleich zu dem von Veldkamp deutlich kürzer, aber auch komplexer.
In dieser Arbeit wird der Beweis des Einbettungssatzes nun neu aufgeschrieben. Er richtet sich dabei in vielen Teilen nach dem von J. Tits. Der Teil über Gebäude wird allerdings ersetzt durch einen spezielleren aber dadurch einfacheren Satz über Fortsetzungen von Isomorphismen zweier Polarräume, bewiesen von Romain Hild in [5]. Dadurch kommt der Beweis des Einbettungssatzes ohne Gebäudetheorie aus, wird sehr viel elementarer und ist schließlich auch deutlich kürzer als Veldkamps Beweis.

Mein herzlichster Dank gilt Prof. Dr. Dr. Katrin Tent für die ausgezeichnete Betreuung und Unterstützung sowie für die interessante Aufgabenstellung. Besonders danken möchte ich auch meinen Eltern für ihre Unterstützung während des gesamten Studiums.

2 Punkt-Geraden-Räume

In diesem Kapitel soll der Begriff des Punkt-Geraden-Raumes eingeführt werden. Dieser Begriff ist grundlegend für die Definition der projektiven Räume und der Polarräume, die in Kapitel 3 bzw. in Kapitel 5 eingeführt werden.

Definition 2.1. Ein *Punkt-Geraden-Raum* ist ein Paar $S = (P, L)$, bestehend aus einer Menge P, deren Elemente *Punkte* heißen und einer Menge L von Teilmengen von P der Kardinalität mindestens zwei, deren Elemente *Geraden* heißen.

Definition 2.2. Zwei Punkte aus P heißen *kollinear*, wenn sie gleich sind oder es eine Gerade in L gibt, die beide Punkte enthält. Ist p ein Punkt aus P, dann bezeichnet $p^\perp$ die Menge der Punkte, die kollinear sind zu p. Für eine Teilmenge X von P setze $X^\perp := \bigcap_{x \in X} x^\perp$.

Bemerkung 2.3. *Die Menge $X^\perp$ enthält also die Punkte von S, die kollinear sind zu allen Elementen aus X.*

Definition 2.4. Eine Teilmenge U von P heißt *Unterraum* von S, wenn alle Geraden l aus L, die zwei Punkte mit U gemeinsam haben, in U enthalten sind.

Lemma 2.5. *Die Schnittmenge zweier Unterräume ist ein Unterraum.*

Beweis. Seien X und X' zwei Unterräume eines Punkt-Geraden-Raumes und l eine Gerade mit $|\, l \cap (X \cap X')| \geq 2$. Dann ist sowohl $|\, l \cap X| \geq 2$ als auch $|\, l \cap X'| \geq 2$. Daher ist l sowohl in X als auch in X' enthalten, denn X und X' sind Unterräume. Also liegt l in $X \cap X'$ und damit ist $X \cap X'$ ein Unterraum. □

Definition 2.6. Eine Teilmenge $X \subseteq P$ heißt *singulär*, wenn $X \subseteq X^\perp$ gilt.

Bemerkung 2.7. *Eine Teilmenge X ist also genau dann singulär, wenn jeder Punkt aus X kollinear ist zu allen anderen Punkten aus X.*

Definition 2.8. Ein singulärer Unterraum X hat die *Dimension* j, auch mit $dim(X)$ bezeichnet, wenn jede Kette $\emptyset \neq X_1 \subsetneq ... \subsetneq X_i$ $(\subsetneq X)$ von verschiedenen, echt in X enthaltenen, singulären Unterräumen höchstens j Elemente hat, also $i \leq j$ ist.

Definition 2.9. Ein Punkt-Geraden-Raum S hat den *Rang* n, wenn jede Kette $\emptyset \neq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq ... \subsetneq X_i$ von verschiedenen singulären Unterräumen von S höchstens n Elemente hat, also $i \leq n$ ist.

Bemerkung 2.10. *Es ist also Rang*$(S) = dim(X) + 1$ *für einen maximalen singulären Unterraum* X *von* S.

Definition 2.11. Ist $X \subseteq S$, so induziert S eine Punkt-Geraden-Struktur $S_X = (X, L_X)$ auf X, wobei $L_X = \{l \cap X : l \in L \text{ und } |l \cap X| \geq 2\}$.

Definition 2.12. Seien $S = (P, L)$ und $S' = (P', L')$ zwei Punkt-Geraden-Räume. Eine bijektive Abbildung $\alpha : P \to P'$ heißt *Isomorphismus von Punkt-Geraden-Räumen*, wenn α eine Bijektion von L nach L' induziert.

Definition 2.13. Seien $S = (P, L)$ und $S' = (P', L')$ zwei Punkt-Geraden-Räume und X und X' Teilmengen von P. Die Abbildung $\beta : X \to X'$ ist ein *Isomorphismus von* X *nach* X', wenn β einen Isomorphismus von S_X nach $S'_{X'}$ induziert.

Definition 2.14. Für eine Teilmenge $X \subseteq P$ eines Punkt-Geraden-Raumes $S = (P, L)$ setze $\langle X \rangle := \bigcap\limits_{X \subseteq Y} Y$, wobei Y Unterraum von S sein soll, der X enthält. Nach Lemma 2.5. ist $\langle X \rangle$ ein Unterraum, der *von* X *erzeugter Unterraum* genannt wird.

Definition 2.15. Ein Punkt-Geraden-Raum $S = (P, L)$ heißt *linear*, wenn für je zwei beliebige Punkte aus P eine eindeutige Gerade in L existiert, die beide Punkte enthält.

Bemerkung 2.16. *In einem linearen Punkt-Geraden-Raum ist also* $\langle x, y \rangle$ *die eindeutige Gerade, die die Punkte* x *und* y *enthält.*

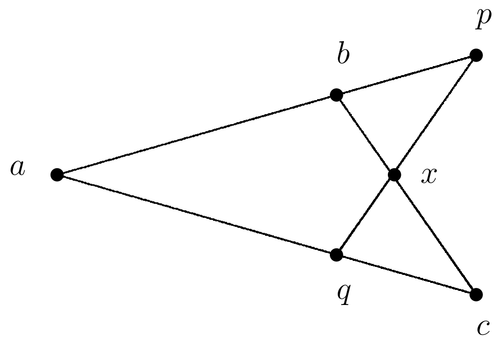
Definition 2.17. Ein Punkt-Geraden-Raum $S = (P, L)$ heißt *dick*, wenn jede Gerade mindestens drei verschiedene Punkte enthält.

3 Projektive Räume

Die projektiven Räume spielen eine zentrale Rolle in dieser Arbeit, denn in Kapitel 6 werden die Polarräume, die gewisse Eigenschaften erfüllen, in projektive Räume mit einer Polarität eingebettet.

Definition 3.1. Sei $S = (P, L)$ ein dicker, linearer Punkt-Geraden-Raum, der mindestens drei Punkte enthält, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Außerdem gelte, dass zwei beliebige Geraden aus L einen Punkt gemeinsam haben. Dann heißt S *projektive Ebene.*
Eine *Ebene* in einem Punkt-Geraden-Raum ist ein Unterraum X von S, für den gilt, dass S_X projektive Ebene ist.

Definition 3.2. Ein *projektiver Raum* ist ein linearer Punkt-Geraden-Raum $S = (P, L)$, der das Veblen-Young-Axiom erfüllt:
Seien a, b, c, p und q Punkte aus P, so dass $\langle a, b, p\rangle$ bzw. $\langle a, q, c\rangle$ Geraden in S bilden. Dann folgt, dass sich die Geraden $\langle b, c\rangle$ und $\langle p, q\rangle$ in einem Punkt x schneiden.



Bemerkung 3.3. *Es ist klar, dass eine projektive Ebene auch ein projektiver Raum ist.*

Lemma 3.4. *Ein Unterraum eines projektiven Raumes ist ebenfalls ein projektiver Raum.*

Beweis. Sei X ein Unterraum des projektiven Raumes $S = (P, L)$. Weiter seien a, b, c, p und q Punkte aus X, so dass $\langle a, b, p\rangle$ bzw. $\langle a, q, c\rangle$ Geraden in X bilden. Da S ein projektiver Raum ist, haben die Geraden $\langle b, c\rangle$ und $\langle p, q\rangle$ zunächst einen gemeinsamen Punkt x in S. Da aber X ein Unterraum von S ist, müssen nach Definition des Unterraumes beide Geraden in X enthalten sein, also auch ihr Schnittpunkt x. Damit ist X ebenfalls ein projektiver Raum. □

Definition 3.5. Ist $S = (P, L)$ projektiver Raum, dann ist die Menge P ein singulärer Unterraum. Die *Dimension des projektiven Raumes S* ist dann definiert als die Dimension von P als singulärer Unterraum.

Lemma 3.6. *Eine projektive Ebene ist ein projektiver Raum der Dimension 2.*

Beweis. Sei E eine projektive Ebene. Da es in E drei Punkte gibt, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, hat E mindestens die Dimension 2. Es gibt demnach eine Kette $X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq X_3 \subseteq E$ singulärer Unterräume, wobei X_1 Punkt und X_2 Gerade in E ist und X_3 Dimension 2 hat. Außer X_2 gibt es eine weitere Gerade l in X_3, die X_1 enthält. Sei x Punkt in E. Dann ist x kollinear zu allen Punkten in X_2. Sei y ein solcher Punkt verschieden von X_1. Da E projektive Ebene ist, schneidet die Gerade $\langle x, y \rangle$ auch die Gerade l in einem Punkt z. Mit $y, z \in X_3$ ist dann auch $x \in X_3$, denn X_3 ist Unterraum. Es folgt daher $E \subseteq X_3$, also $X_3 = E$ und damit hat E die Dimension 2. □

Definition 3.7. Sei V ein Vektorraum über einem Schiefkörper k und setze $\mathbb{P}(V) = (P, L)$. Dabei sei P die Menge der Geraden durch den Ursprung in V und L die Menge der Ebenen durch den Ursprung in V. Dann heißt $\mathbb{P}(V)$ *projektiver Raum des Vektorraumes* V.

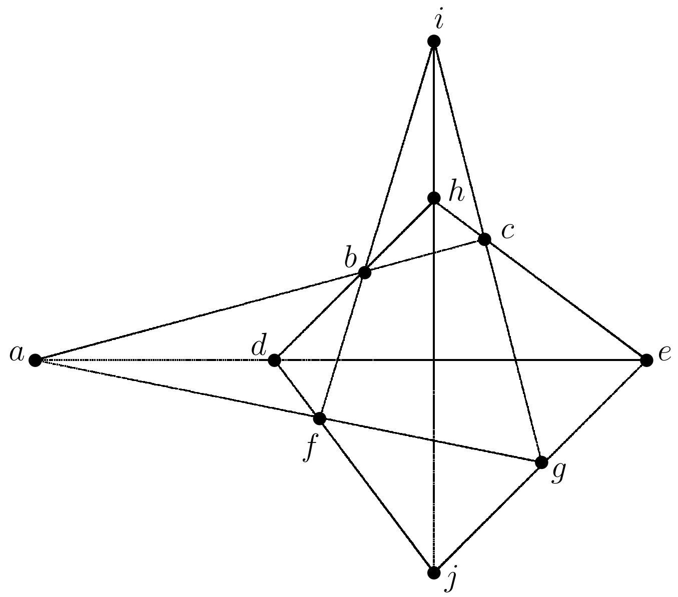
Bemerkung 3.8. *Das Paar* $\mathbb{P}(V)$ *ist auch im Sinne der Definition 3.2. ein projektiver Raum.*

Definition 3.9. Ein projektiver Raum heißt *desarguesch*, wenn er isomorph ist zum projektiven Raum eines Vektorraumes.

Theorem 3.10. *(vgl. [4], S.10, Theorem 1.) Ist* S *projektiver Raum der Dimension größer oder gleich drei, dann ist* S *desarguesch.*

Bemerkung 3.11. *Dieses Theorem gilt nicht für projektive Räume der Dimension 2.*

Theorem 3.12. *(vgl. [4], S.31, Proposition 1.3.) Sei* $\mathbb{P}$ *ein desarguescher projektiver Raum. Dann gilt die folgende Desargues-Konfiguration:*
Seien a, b, c, d, e, f, g, h, i *und* j *verschiedene Punkte, so dass die Punkte in folgenden Tripel jeweils auf einer Geraden liegen:* (a, b, c), (a, d, e), (a, f, g) (b, d, h) (c, e, h) (b, f, i) (c, g, i) (d, f, j) (e, g, j). *Dann gibt es eine Gerade, die* h, i *und* j *enthält. Siehe dazu auch die Abbildung unten.*



Theorem 3.13. *(vgl. [4], S.35, Theorem 2.1.) Eine projektive Ebene ist genau dann desarguesch, wenn sie die Desargues-Konfiguration erfüllt.*

Korollar 3.14. *Eine projektive Ebene, die in einem desargueschen projektiven Raum enthalten ist, ist desarguesch.*

Beweis. Sei E eine projektive Ebene, die in einem desargueschen projektiven Raum $\mathbb{P}$ enthalten ist. Nach Theorem 3.12. ist die Desargues-Konfiguration für $\mathbb{P}$ erfüllt. Gibt es verschiedene Punkte a, b, c, d, e, f, g, h, i und j in E, so dass die Punkte in folgenden Tripel jeweils auf einer Geraden liegen: (a, b, c), (a, d, e), (a, f, g) (b, d, h) (c, e, h) (b, f, i) (c, g, i) (d, f, j) (e, g, j). Dann gibt es eine Gerade in $\mathbb{P}$, die h, i und j enthält. Da aber h, i und j Punkte in E sind und E Unterraum von $\mathbb{P}$ ist, ist die Gerade $\langle h, i, j \rangle$ auch in E enthalten. Damit gilt auch in E die Desargues-Konfiguration. Nach Theorem 3.13. ist E also desarguesch. □

Hauptsatz der projektiven Geometrie 3.15. *(vgl. [1], Theorem 2.26) Seien $\mathbb{P}(V)$ und $\mathbb{P}(V')$ zwei projektive Räume derselben Dimension $n \geq 2$ von Vektorräumen V und V' über Körpern K und K'. Ist $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ ein Isomorphismus projektiver Räume, dann ist f induziert auf $\mathbb{P}(V)$ durch eine Bijektion $g : V \to V'$, die additiv ist und folgendes erfüllt: $g(ax) = s(a)g(x)$, wobei $s : K \to K'$ ein fester Körperisomorphismus ist.*

Definition 3.16. Eine *Hyperebene* eines Punkt-Geraden-Raumes ist ein echter, maximaler Unterraum.

Theorem 3.17. *(vgl. [5], Theorem 2.11)*
Sei $\mathbb{P} = (P, L)$ *ein projektiver Raum der Dimension* $n \geq 2$ *und* H_0 *eine Hyperebene von* $\mathbb{P}$. *Seien* p *und* q *zwei verschiedene Punkte in* $P \backslash H_0$. *Sei* H_0' *eine Hyperebene eines projektiven Raumes* $\mathbb{P}' = (P', L')$. *Seien* p' *und* q' *zwei verschiedene Punkte in* $P' \backslash H_0'$. *Setze* $r := \langle p, q \rangle \cap H_0$ *und* $r' := \langle p', q' \rangle \cap H_0'$. *Sei* $\alpha : H_0 \rightarrow H_0'$ *ein Isomorphismus mit* $\alpha(r) = r'$. *Dann lässt sich* α *auf eindeutige Weise zu einem Isomorphismus* $\hat{\alpha}$ *zwischen* S *und* S' *fortsetzen, so dass* $\hat{\alpha}(p) = p'$ *und* $\hat{\alpha}(q) = q'$.

4 Affine Räume

Im vorherigen Kapitel wurde gezeigt wie sich aus Vektorräumen projektive Räume konstruieren lassen. Umgekehrt kann man aus projektiven Räumen von Vektorräumen affine Räume konstruieren. Das soll nun gezeigt werden.

Definition 4.1. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und M eine nichtleere Menge. Einen Homomorphismus $\phi : G \to S_M$ von G auf die Permutationsgruppe S_M von M nennt man eine *Operation der Gruppe G auf der Menge M*. Für $g \in G$ und $m \in M$ schreibe statt $\phi(g)(m)$ auch $g \cdot m$ oder gm.

Definition 4.2. Sei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und A eine Menge auf der V von rechts operiert. Schreibe die Operation additiv. Dann gibt es für jedes $a \in A$ und jedes $v \in V$ einen Punkt $a + v \in A$, so dass

(i) $a + 0 = a$

(ii) $a + (u + v) = (a + u) + v$ für $u, v \in V$

(iii) Seien $a, b \in A$. Dann gibt es ein eindeutiges Element $v \in V$, so dass $a + v = b$.

Die Menge A heißt dann *affiner Raum basierend auf V* und die *Dimension von A* wird definiert als die Dimension des Vektorraumes V.

Beispiel 4.3.

(i) Ist V ein Vektorraum, dann ist V ein affiner Raum basierend auf sich selbst.

(ii) Sei V ein Vektorraum, U ein Unterraum und $v \in V$. Dann ist $v + U$ ein affiner Raum basierend auf U.

Lemma 4.4. *(vgl.[6], S.14) Sei $\mathbb{P}(V) = (P, L)$ ein projektiver Raum eines Vektorraumes V und $H \subsetneq P$ eine Hyperebene von $\mathbb{P}(V)$. Dann ist das Paar $(P \backslash H, L_{P \backslash H}) = \mathbb{P}(V) \backslash H =: A$ ein affiner Raum basierend auf H als Unterraum von V.*

Beweis. Sei $u \in V$. Da H Hyperebene in V ist, kann jedes Element von A geschrieben werden als $\langle u + h \rangle$ mit einem eindeutigen Element h aus dem Vektorraum H. Definiere die Operation von $w \in V$ auf $\langle u + h \rangle$ durch $\langle u + h \rangle + w = \langle u + h + w \rangle$. Dann gilt für $a = \langle u + h \rangle \in A$

(i) $a + 0 = \langle u + h \rangle + 0 = \langle u + h + 0 \rangle = \langle u + h \rangle = a$

(ii) $a+(v+w) = \langle u+h\rangle+(v+w) = \langle u+h+(v+w)\rangle = \langle (u+h+v)+w\rangle$
$= \langle u+h+v\rangle + w = (\langle u+h\rangle + v) + w = (a+v)+w$

(iii) Seien $a = \langle u+h\rangle$ und $b = \langle u+h'\rangle \in A$. Dann ist $v := h'-h \in H$ und es gilt $a+v = \langle u+h\rangle + (h'-h) = \langle u+h+(h'-h)\rangle = \langle u+h'\rangle = b$. Das Element v ist eindeutig, denn ist $v' \in H$ mit $a+v' = b$, dann ist $a+v' = b = a+v$ und damit sofort $v = v'$.

Also ist A ein affiner Raum. $\square$

5 Polarräume

Im ersten Teil dieses Kapitels werden die Polarräume definiert und einige Beispiele gegeben. Der zweite Teil beschäftigt sich mit einigen wichtigen Eigenschaften dieser Räume, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit von Bedeutung sein werden. Der darauf folgende Teil führt die Polaritäten ein, über die später die Einbettungen definiert werden. Schließlich werden im letzten Teil aus hermiteschen Formen bzw. pseudo-quadratischen Formen Polarräume konstruiert.

5.1 Definitionen und Beispiele

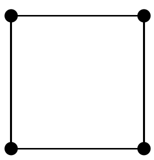
Definition 5.1. Ein Punkt-Geraden-Raum $S = (P, L)$ heißt *Polarraum*, wenn die beiden folgenden Axiome gelten:

(i) Für jeden Punkt p und jede Gerade l gilt, dass p kollinear ist zu allen oder genau einem Punkt in l.

(ii) Kein Punkt p ist kollinear zu allen Punkten aus P.

Beispiel 5.2. Die leere Menge ist ein Polarraum, sowie die beiden Beispiele:

i)

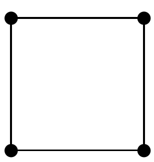


ii)

Definition 5.3. Ein Polarraum S hat den *Rang* n, wenn er als Punkt-Geraden-Raum den Rang n hat.

Beispiel 5.4. Die leere Menge hat den Rang 0 und für die anderen beiden Beispiele aus 5.2. gilt:

i)



hat den Rang 2

ii)

hat den Rang 1

5.2 Eigenschaften

Lemma 5.5. *(vgl. teilweise [5], Propositionen 3.3., 3.7. und 3.13.)*
Sei $S = (P, L)$ ein Polarraum. Dann gelten folgende Eigenschaften:

1. *Sind X und Y zwei Teilmengen von S, dann ist $(X \cup Y)^{\perp} = X^{\perp} \cap Y^{\perp}$.*

2. *Sind X und Y zwei Teilmengen von S, dann folgt aus $X \subseteq Y$, dass $Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}$ gilt.*

3. *Sei Y ein singulärer Unterraum von S und X ein in Y enthaltener Unterraum. Dann ist auch X singulär.*

4. *Für alle Punkte p ist $p^{\perp}$ ein Unterraum von S.*

5. *Ist X eine Teilmenge von P, dann ist $X^{\perp}$ ein Unterraum von S.*

6. *Ist X eine Teilmenge von P, dann gilt: $X^{\perp} = \langle X \rangle^{\perp}$.*

7. *Ist X eine maximale singuläre Teilmenge von P, dann ist X ein Unterraum.*

8. *Ist $X \subseteq P$ eine singuläre Teilmenge, dann ist $\langle X \rangle$ singulär.*

9. *Für alle $x \in P$, $l \in L$ gilt: $x^{\perp} \neq l^{\perp}$.*

10. *Für zwei Punkte p und $q \in P$ gilt $p^{\perp} \subseteq q^{\perp}$, genau dann wenn $p = q$.*

11. *Seien p und q zwei nicht kollineare Punkte. Dann ist der Punkt-Geraden-Raum $S_{(p^{\perp} \cap q^{\perp})} = ((p^{\perp} \cap q^{\perp}), L_{(p^{\perp} \cap q^{\perp})})$ ein Polarraum. Hat S den Rang $n \geq 1$, dann hat $S_{(p^{\perp} \cap q^{\perp})}$ als Polarraum den Rang $n - 1$.*

12. *Gibt es eine Gerade durch zwei Punkte x und y aus P, dann ist diese Gerade eindeutig.*

13. *Für $p \in P$ ist die Menge $p^{\perp}$ eine Hyperebene von S.*

Beweis.

1. $X^{\perp} \cap Y^{\perp} = \bigcap\limits_{x \in X} x^{\perp} \cap \bigcap\limits_{y \in Y} y^{\perp} = \bigcap\limits_{x \in X, y \in Y} x^{\perp} \cap y^{\perp} = \bigcap\limits_{z \in (X \cup Y)} z^{\perp} = (X \cup Y)^{\perp}$

2. Mit *1.* folgt, dass $Y^{\perp} = (X \cup Y)^{\perp} = X^{\perp} \cap Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}$ gilt.

3. Mit *2.* folgt, dass $X \subseteq Y \subseteq Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}$ gilt.

4. Sei $l \in L$ mit $\left| l \cap p^{\perp} \right| \geq 2$. Dann gilt nach Definition des Polarraumes, dass l in $p^{\perp}$ enthalten ist. Also ist $p^{\perp}$ ein Unterraum von S.

5. Die Menge $X^\perp$ ist definiert durch $\bigcap\limits_{x\in X} x^\perp$. Wegen *4.* ist $x^\perp$ ein Unterraum und nach Lemma 2.5. ist der Schnitt von Unterräumen wieder ein Unterraum. Also ist $X^\perp$ ein Unterraum von S.

6. Es ist einerseits $X \subseteq \langle X\rangle$, also gilt nach *2.* die Inklusion $\langle X\rangle^\perp \subseteq X^\perp$. Sei andererseits y in $X^\perp$. Dann ist $X \subseteq y^\perp$ und da $y^\perp$ nach *4.* ein Unterraum ist, gilt dann $\langle X\rangle \subseteq y^\perp$. Also ist $y \in \langle X\rangle^\perp$ und damit $X^\perp = \langle X\rangle^\perp$.

7. Sei X eine maximale singuläre Teilmenge von P und l eine Gerade, die zwei Punkte a und b mit X gemeinsam hat. Dann sind alle $x \in X$ kollinear zu a und b. Also ist l in $x^\perp$ enthalten für alle $x \in X$ und damit $l \subseteq X^\perp$ und $X \subseteq l^\perp$. Also folgt, dass $X \cup l \subseteq X^\perp \cap l^\perp = (X \cup l)^\perp$. Da aber X maximaler singulärer Unterraum ist, muss dann $l \subseteq X$ sein. Damit ist X also ein Unterraum von S.

8. Sei X' ein maximaler singulärer Unterraum, der X enthält. Dann folgt, zusammen mit *2.*, dass $\langle X\rangle \subseteq X' \subseteq X'^\perp \subseteq \langle X\rangle^\perp$ gilt. Also ist $\langle X\rangle$ singulär.

9. Angenommen es gibt $x \in P$ und $l \in L$ mit $x^\perp = l^\perp$. Für $y \in l$ setze dann:

$$\begin{aligned} P_y &= \big\{p \in P : p^\perp \cap l = \{y\}\big\} \\ \Omega &= \{y \in l : P_y \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

   - Ist $|\,\Omega| = 0$, dann gilt für alle p in P, dass $p^\perp \cap l = l$ und das heißt, dass $l \subseteq P^\perp$. Aber das ist ein Widerspruch, denn $P^\perp = \emptyset$.
   - Ist $|\,\Omega| = 1$, also $\Omega = \{a\}$, dann ist $P = l^\perp \cup P_a$, denn wenn $p \notin P_a$, dann ist $l \subseteq p^\perp$ und damit $p \in l^\perp$. Weiter ist $a \in l^{\perp\perp}$ und $a \in P_a^\perp$, denn $a \in p^\perp$ für $p \in P_a$, also $a \in \bigcap\limits_{p\in P_a} p^\perp = P_a^\perp$. Also ist $a \in l^{\perp\perp} \cap P_a^\perp = (l^\perp \cup P_a)^\perp = P^\perp$ und das widerspricht der Tatsache, dass $P^\perp = \emptyset$.
   - Also ist $|\,\Omega| \geq 2$. Wähle $a, b \in \Omega$ mit $a \neq b$. Seien $a' \in a^\perp \backslash l^\perp$ und $b' \in b^\perp \backslash l^\perp$ und l_a eine Gerade, die a und a' enthält. Weiter sei l_b eine Gerade, die b und b' enthält. Es ist $a \notin b'^\perp$, da $\left|a^\perp \cap l_b\right| = 1$ und $a \perp b$. Sei a'' der Schnittpunkt von l_a und $b'^\perp$ und l' eine Gerade durch a'' und b'. Weiter sei $x' \in l' \cap x^\perp$.
     Ist $x' = b'$, dann ist $b' \in x^\perp = l^\perp$, was der Annahme, dass $b' \notin l^\perp$, widerspricht.
     Ist $x' \neq b'$, dann ist $x' \in x^\perp = l^\perp \subseteq b^\perp$. Die Inklusion folgt aus *2.*

Dann ist $x' \in b^\perp$ und $x' \in l'$, was impliziert, dass $\left|b^\perp \cap l'\right| \geq 2$ ist. Also ist $l' \subseteq b^\perp$. Da $a'' \in l'$ ist dann $a'' \in b^\perp$. Also folgt aus $a'' \in b^\perp$ und $a \in b^\perp$, dass $\left|b^\perp \cap l_a\right| \geq 2$. Dann ist $l_a \subseteq b^\perp$ und daraus folgt, dass $a' \in b^\perp$. Weiter ergibt sich, dass $b \in a'^\perp$. Es folgt also, dass $l \subseteq a'^\perp$. Das heißt $a' \in l^\perp$, aber das ist ein Widerspruch, denn $a' \in a^\perp \backslash l^\perp$.

Also ist $x^\perp \neq l^\perp$ für alle $x \in P$ und $l \in L$.

10. Sei zunächst $p = q$. Dann ist natürlich $p^\perp = q^\perp$ und damit $p^\perp \subseteq q^\perp$. Sei also nun $p,\, q \in P$, $p^\perp \subseteq q^\perp$, und nehme an, dass $p \neq q$. Dann ist $p \in q^\perp$ und es existiert eine Gerade $l \in L$, die p und q enthält. Es gilt für alle Punkte z in P, dass $z \in l^\perp$ genau dann, wenn $z \in p^\perp \cap q^\perp$. Aber dann ist $z \in l^\perp$ genau dann, wenn $z \in p^\perp$, da $p^\perp \subseteq q^\perp$. Also ist $p^\perp = l^\perp$, aber das ist ein Widerspruch zu *9.*, daher ist $p = q$.

11. Zeige, dass die Axiome aus der Definition des Polarraumes für $S_{(p^\perp \cap q^\perp)}$ erfüllt sind:

    (i) Sei $x \in (p^\perp \cap q^\perp)$ und $l \in L_{(p^\perp \cap q^\perp)}$. Ist $\left|l \cap (p^\perp \cap q^\perp)\right| \geq 2$, dann folgt $l \in (p^\perp \cap q^\perp)$, da $p^\perp$ und $q^\perp$ nach *4.* Unterräume von S sind und nach Lemma 2.5. somit auch ihre Schnittmenge $(p^\perp \cap q^\perp)$. Also gilt nach Definition 2.11., dass $l \in L$ ist.
    In S gilt $\left|x^\perp \cap l\right| = 1$ oder $l \subseteq x^\perp$.
    Ist $\left|x^\perp \cap l\right| = 1$ in S, dann gibt es also eine Gerade $l' \in L$, die x und einen Punkt $y \in l$ enthält. Da aber $\left|l' \cap (p^\perp \cap q^\perp)\right| \geq 2$ ist, gilt $l' \subseteq (p^\perp \cap q^\perp)$ und damit $l' \in L_{(p^\perp \cap q^\perp)}$. Also gilt $\left|x^\perp \cap l\right| = 1$ auch in $S_{(p^\perp \cap q^\perp)}$.
    Ist $l \subseteq x^\perp$ in S, dann sind l und x in $(p^\perp \cap q^\perp)$ enthalten und damit auch jede Gerade l' aus L, die x und einen Punkt aus l enthält. Also gilt $l \subseteq x^\perp$ auch in $S_{(p^\perp \cap q^\perp)}$.

    (ii) Ist $x^\perp = (p^\perp \cap q^\perp)$ in $S_{(p^\perp \cap q^\perp)}$, dann ist $(p^\perp \cap q^\perp) \subseteq x^\perp$ in S. Angenommen es gilt $x^\perp \neq p^\perp$. Dann gibt es also $y \in p^\perp \backslash x^\perp$. Sei l' eine Gerade, die die Punkte p und y enthält. Dann gibt es einen Punkt z in l', der kollinear zu q ist. Also ist $z \in (p^\perp \cap q^\perp)$ und damit kollinear zu x. Daher folgt $l \subseteq x^\perp$ und $x \perp y$. Das ist aber ein Widerspruch, also ist $x^\perp = p^\perp$. Daher folgt mit *10.*, dass $x = p$ ist. Aber dann wäre $p \perp q$, was der Vorraussetzung widerspricht. Damit ist $(p^\perp \cap q^\perp) \nsubseteq x^\perp$, also gilt $x^\perp \neq (p^\perp \cap q^\perp)$ in $S_{(p^\perp \cap q^\perp)}$.

Damit ist $S_{(p^\perp \cap q^\perp)}$ also ein Polarraum.

Sei nun m der Rang von $S_{(p^\perp \cap q^\perp)}$. Angenommen es gibt eine Kette $\emptyset \neq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq ... \subsetneq X_n$ singulärer Unterräume der Länge n in $S_{p^\perp \cap q^\perp}$. Dann setze $Y_1 = \{p\}$ und $Y_{i+1} := \langle p, X_i \rangle$ für $1 \leq i \leq n$. Dann ist $Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq ... \subsetneq Y_{n+1}$ eine Kette singulärer Teilmengen der Länge $n+1$, enthalten in S. Aber das ist ein Widerspruch zu $Rang(S) = n$, also ist $m < n$.

Sei $X_1 \subsetneq X_2 ... \subsetneq X_n$ eine Kette singulärer Unterräume der Länge n in S mit $X_1 = \{p\}$. Dann ist X_i von der Form $\langle p, Z_{i-1} \rangle$ für $2 \leq i \leq n$, wobei die Z_i singuläre Mengen in $(p^\perp \cap q^\perp)$ sind. Das heißt die Kette $\langle Z_1 \rangle \subsetneq \langle Z_2 \rangle \subsetneq ... \subsetneq \langle Z_{n-1} \rangle$ ist eine Kette singulärer Unterräume der Länge $n-1$ in $(p^\perp \cap q^\perp)$.

Insgesamt ist dann also $m = n - 1$.

12. Seien x und y zwei verschiedene Punkte in P und seien $l_1, l_2 \in L$, so dass x, $y \in l_1 \cap l_2$. Nehme an, dass $l_1 \neq l_2$ und sei $p_1 \in l_1 \backslash l_2$. Nach *9.* gilt, dass $p_1^\perp \neq l_1^\perp$ und es existiert $c \in p_1^\perp \backslash l_1^\perp$ mit $c^\perp \cap l_1 = \{p_1\}$. Dann ist x, $y \notin c^\perp$, was impliziert, dass $\left|c^\perp \cap l_2\right| = 1$. Sei p_2 der Schnittpunkt von $c^\perp$ und l_2. Da $x \perp p_1 \perp y$ ist, gilt, dass $\left|p_1^\perp \cap l_2\right| \geq 2$. Dann ist $l_2 \subseteq p_1^\perp$ und damit $p_1 \perp p_2$. Sei l eine Gerade durch p_1 und p_2. Es gilt:

$$\begin{aligned} \left|x^\perp \cap l\right| &\geq 2 \\ \left|c^\perp \cap l\right| &\geq 2 \\ \left|y^\perp \cap l\right| &\geq 2 \end{aligned}$$

und es folgt $l \subseteq (x^\perp \cap c^\perp) \cap y^\perp$. Also ist $l \subseteq (x^\perp \cap c^\perp)$ und $p_1 \in l$. Nach *11.* ist $S_{(c^\perp \cap x^\perp)}$ ein Polarraum. Sei $u \in p_1^\perp \cap (c^\perp \cap x^\perp)$. Dann ist $\left|u^\perp \cap l_1\right| \geq 2$, also $l_1 \subseteq u^\perp$ und damit $p_1 \perp u$. Weiter ist $\left|u^\perp \cap l_2\right| \geq 2$, also $l_2 \subseteq u^\perp$ und damit $p_2 \perp u$. Also ist $\left|l \cap u^\perp\right| \geq 2$ und dann folgt $l \subseteq u^\perp$, demnach ist $u \in l^\perp$.

Daher ist $p_1^\perp \cap (c^\perp \cap x^\perp) \subseteq l^\perp$ und damit $p_1^\perp \cap (c^\perp \cap x^\perp) \subseteq l^\perp \cap (c^\perp \cap x^\perp)$. Es folgt $p_1^\perp \subseteq l^\perp$ in $S_{(c^\perp \cap x^\perp)}$, also gilt $p_1^\perp = l^\perp$. Nach *9.* ist das aber ein Widerspruch und daher $l_1 \neq l_2$.

13. Dass $p^\perp$ ein Unterraum ist, folgt aus *4.* Sei Y ein Unterraum von P, so dass $p^\perp \subsetneq Y$. Dann gibt es einen Punkt $y \in P$ mit $y \notin p^\perp$, so dass $p^\perp \neq \langle p^\perp, y \rangle \subseteq Y$ gilt.

Ist $x \in p^\perp \cup \{y\}$, dann folgt sofort, dass $x \in Y$.

Ist also $x \in P \backslash (p^\perp \cup \{y\})$, dann gibt es eine Gerade l in L, die x enthält, so dass p und y kollinear sind zu verschiedenen Punkten auf l. Eine solche Gerade existiert, denn sonst wäre $x^\perp \subseteq y^\perp$ oder $y^\perp \subseteq x^\perp$ und damit nach *10.* $x = y$, aber das wäre ein Widerspruch.

Es gibt einen Punkt $x_1 \in l$ kollinear zu y und nach *12.* eine eindeutige Gerade $\langle x_1, y \rangle$. Auf dieser Geraden gibt es einen Punkt x_2 kollinear zu p und auf l einen Punkt x_3 kollinear zu p. Es ist also $x_3 \in \left\langle p^\perp, y \right\rangle$ und außerdem folgt aus $x_2, y \in \left\langle p^\perp, y \right\rangle$, dass $\langle x_1, y \rangle$ enthalten ist in $\left\langle p^\perp, y \right\rangle$. Also sind $x_1, x_3 \in \left\langle p^\perp, y \right\rangle$ und damit ist die Gerade l enhalten in $\left\langle p^\perp, y \right\rangle$, also auch $x \in \left\langle p^\perp, y \right\rangle \subseteq Y$.
Insgesamt folgt also, dass $P \subseteq \left\langle p^\perp, y \right\rangle \subseteq Y$ und damit $P = Y$. Also ist $p^\perp$ eine Hyperbene von S.

□

Definition 5.6. In einem Polarraum $S = (P, L)$ vom Rang n heißt eine Teilmenge F von P der Kardinalität $2n$ *Polarrahmen*, wenn es zu jedem Punkt aus F genau einen anderen in F gibt zu dem er nicht kollinear ist.

Lemma 5.7. *In jedem Polarraum vom Rang $n \geq 1$ existieren Polarrahmen.*

Beweis. Sei $S = (P, L)$ Polarraum vom Rang $n \geq 1$. Beweis durch Induktion über den Rang n von S:

- Induktionsanfang:
  Ist der Rang $n = 1$, dann sind alle singulären Unterräume einzelne Punkte und somit ist die Menge L der Geraden leer. Weiter enthält S mindestens zwei Punkte, sonst wäre *(ii)* aus Definition 5.1. nicht erfüllt. Da L leer ist, sind je zwei Punkte aus S nicht kollinear. Also ist jede Menge F bestehend aus zwei Punkten aus S ein Polarrahmen.

- Induktionsvorraussetzung:
  In jedem nichtleeren Polarraum S vom Rang n gibt es einen Polarrahmen.

- Induktionsschritt:
  Sei S ein Polarraum vom Rang $n+1$ und seien p und q zwei nicht kollineare Punkte in S. Nach Lemma 5.5.*11.* ist der Punkt-Geraden-Raum $S_{(p^\perp \cap q^\perp)}$ ein Polarraum vom Rang n, der nach Induktionsvorraussetzung einen Polarrahmen F besitzt. Dann ist $F' = F \cup \{p, q\}$ ein Polarrahmen von S, denn p und q sind kollinear zu allen Punkten aus F aber nicht kollinear zueinander.

□

Definition 5.8. Sei $S = (P, L)$ ein Punkt-Geraden-Raum. Eine *geometrische Hyperebene* von S ist ein echter Unterraum $X \subsetneq P$, der mit jeder Geraden $l \in L$ mindestens einen Punkt gemeinsam hat.

Theorem 5.9. *(vgl.[3], Theorem 1.) Sei M ein singulärer Unterraum eines Polarraumes S und $\mathscr{H}$ die Menge der geometrischen Hyperebenen von M, so dass gilt:*

(i) Für jedes Paar verschiedener Elemente H_1, H_2 von $\mathscr{H}$ und jeden Punkt $p \in M \backslash (H_1 \cap H_2)$, gibt es ein H in $\mathscr{H}$, das p und $H_1 \cap H_2$ enthält.

(ii) Für jeden Punkt p in M gibt es ein Element H von $\mathscr{H}$, das p nicht enthält.

Dann ist M ein projektiver Raum.

Theorem 5.10. *(vgl. [3], Theorem 2.) Singuläre Unterräume von Polarräumen sind projektive Räume.*

Beweis. Sei X ein singulärer Unterraum des Polarraums S. Dann ist X in einem maximalen singulären Unterraum M enthalten. Sei p ein Punkt in $S \backslash M$ und $\mathscr{H}$ die Menge der Teilmengen der Form $p^\perp \cap M$ von M.
Behauptung: Die Menge $p^\perp \cap M$ ist eine echte Teilmenge von M. Angenommen $M \subseteq p^\perp$. Dann wäre $\{p\} \cup M$ eine singuläre Teilmenge von P. Nach Lemma 5.5.*8.* wäre dann $\langle p, M \rangle$ ein singulärer Unterraum, der M echt enthielte. Das ist aber ein Widerspruch zur Maximalität von M.
Da $p^\perp \cap l$ nicht leer ist für jede Gerade $l \in L$ und damit auch für jede Gerade $l \subseteq M$, ist $\mathscr{H}$ eine Menge von geometrischen Hyperebenen von M. Sei p ein Punkt in M. Da S ein Polarraum ist, gibt es einen Punkt q in S, so dass $p \notin q^\perp$. Damit gilt *(ii)* vom obigen Theorem 5.9.
Seien H_1 , H_2 verschiedene Elemente von $\mathscr{H}$ und $p \in M \backslash (H_1 \cap H_2)$. Es gibt Punkte $a, b \in S \backslash M$, so dass $H_1 = a^\perp \cap M$ und $H_2 = b^\perp \cap M$. Es sind H_1 und H_2 Unterräume von M und damit nach Lemma 5.5.*3.* singulär. Weiter sind a und b singuläre Unterräume und da $H_1 \subseteq a^\perp$ und $H_2 \subseteq b^\perp$, sind auch die Mengen $\{a\} \cup H_1$ und $\{b\} \cup H_2$ singulär. Nach Lemma 5.5.*8.* sind dann $\langle H_1, a \rangle =: M_1$ und $\langle H_2, b \rangle =: M_2$ singulär.
Da $(H_1 \cap H_2) \subsetneq H_1 \subsetneq M_1$ eine Kette verschiedener Unterräume ist, gibt es eine Gerade l in M_1 disjunkt von $H_1 \cap H_2$. Auf l gibt es einen Punkt a' kollinear zu b . Es ist $H_1 = a'^\perp \cap M$, denn $a' \in M_1$. Da M_1 singulär ist, ist dann a' kollinear zu H_1 . Das heißt $H_1 \subseteq a'^\perp$ und damit $H_1 \subseteq a'^\perp \cap M$. Umgekehrt ist a kollinear zu $a'^\perp \cap M$, also $a'^\perp \cap M \subseteq a^\perp \cap M = H_1$. Weiter ist $a' \neq b$, denn $a'^\perp \cap M = H_1$, $b^\perp \cap M = H_2$ und $H_1 \neq H_2$. Es gibt eine Gerade m, die a' und b enthält. Auf m gibt es einen Punkt $c \in p^\perp$. Ist $c \in M$, dann ist $c \in (a'^\perp \cap M) \cap (b^\perp \cap M) = H_1 \cap H_2$ und damit $H_2 \subseteq m^\perp$. Also ist $H_2 \subseteq H_1$ und damit $H_2 = H_1$. Das ist aber ein Widerspruch! Also ist $c \in S \backslash M$ und damit $c^\perp \cap M \in \mathscr{H}$. Außerdem ist p und $H_1 \cap H_2$ in $c^\perp \cap M$ enthalten. Also gilt auch *(i)* von Theorem 5.9. und damit ist M und nach Lemma 3.4. dann auch X ein projektiver Raum. $\square$

Korollar 5.11. *Drei paarweise kollineare Punkte eines Polarraumes, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, spannen eine projektive Ebene auf.*

Beweis. Seien a, b, c drei paarweise kollineare Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Dann ist $\{a, b, c\}$ eine singuläre Menge und nach Lemma 5.5.*8.* auch $\langle\{a, b, c\}\rangle = E$ singulär. Damit ist E nach vorherigem Theorem 5.10. ein projektiver Raum. Seien $g_1 := \langle a, b\rangle$, $g_2 := \langle b, c\rangle$ und $g_3 := \langle a, c\rangle$. Eine Gerade des Polarraumes ist in E enthalten genau dann, wenn sie zwei Punkte mit der Menge $M := g_1 \cup g_2 \cup g_3$ gemeinsam hat. Seien l_1, l_2 zwei beliebige Geraden in E. Dann haben sie also jeweils zwei Punkte mit M gemeinsam. Das heißt sie schneiden jeweils mindestens zwei der drei Geraden g_1, g_2 und g_3. Es gibt also eine gemeinsame Gerade, die sie schneiden. Sei dies o.B.d.A. die Gerade g_3. Stimmt eine zweite auch überein, dann folgt, da das Veblen-Young-Axiom gilt, dass sich l_1 und l_2 schneiden. Sind sie verschieden, dann seien s_1 bzw. s_2 jeweils die Schnittpunkte mit g_1 bzw. g_2. Da E projektiver Raum ist, gibt es eine eindeutige Gerade $\langle s_1, s_2\rangle$. Weil g_3 die Geraden g_1 und g_2 ebenfalls schneidet, gibt es nach dem Veblen-Young-Axiom einen Schnittpunkt von g_3 und $\langle s_1, s_2\rangle$. Wieder mit Veblen-Young-Axiom schneiden sich dann auch l_1 und l_2. ☐

Lemma 5.12. *Sei $S = (P, L)$ Polarraum vom Rang n. Sei P_C die Menge der Geraden aus L die p enthalten und L_C Menge von Teilmengen von P_C, die enthalten sind in einer Ebene von S. Dann ist das Paar $C_p = (P_C, L_C)$ ein Polarraum vom Rang $n - 1$.*

Beweis. Die Kollinearitätsrelation, die sich durch die Definition von C_p ergibt, wird im Folgenden mit $\perp_p$ bezeichnet. Zu zeigen ist also zunächst, dass die beiden Axiome aus Defintion 5.1. gelten:

(i) Sei $x \in P_C$ und $l \in L_C$. Dann ist x eine Gerade in S, die den Punkt p enthält und $\langle l\rangle$ eine Ebene in S, die p enthält. Sei $l_1 \in L$ eine Gerade in l, die p nicht enthält und $y \neq p$ ein Punkt aus S enthalten in x. Dann ist y kollinear zu einem Punkt z aus l_1. Da x, y beide kollinear sind zu p, ist $\langle p, y, z\rangle$ eine Ebene in S, die die Gerade x und die Gerade $\langle p, z\rangle \in l$ enthält. Damit ist also $\left|x^{\perp_p} \cap l\right| \geq 1$.
Angenommen es ist $\left|x^{\perp_p} \cap l\right| \geq 2$. Dann gibt es also zwei Geraden aus S in l, die mit x eine Ebene in S erzeugen. Sei l_1 eine Gerade, die p nicht enthält und a ein Punkt in x. Dann ist a also kollinear zu zwei Punkten in l_1 und damit zu allen. Jede Gerade, die p enthält, schneidet auch l_1, weil l projektive Ebene ist. Daher erzeugt x zusammen mit jeder Geraden in l eine projektive Ebene. Also gilt $l \subseteq x^{\perp_p}$.

(ii) Angenommen es gibt einen Punkt x in P_C mit $x^{\perp_p} = P_C$. Dann gilt also für einen beliebigen Punkt $y \in x$ aus P, dass y kollinear ist zu allen Punkten aus $p^\perp$. Also ist $p^\perp \subseteq y^\perp$. Mit Lemma 5.5.*10.* folgt dann, dass $p = y$ für alle $y \in x$ und das ist ein Widerspruch, also $x^{\perp_p} \neq P_C$.

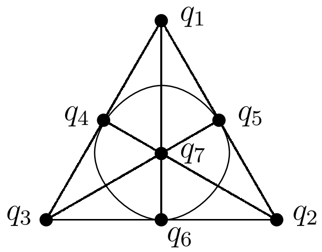
Also ist C_p ein Polarraum.
Sei $X_1 \subsetneq X_2 ... \subsetneq X_n$ Kette singulärer Unterräume von S mit $X_1 = p$. Dann enthält X_i für $i \geq 2$ also eine Menge Y_i von Geraden durch p. Weiter ist $X_i \subsetneq X_{i+1}$. Daher enthält X_{i+1} einen Punkt $y \notin X_i$, der, da X_i singulär ist, kollinear zu p ist. Damit enthält Y_{i+1} die Gerade $\langle p, y \rangle$, die nicht enthalten ist in Y_i, also ist $Y_i \subsetneq Y_{i+1}$. Daher ist dann $Y_2 \subsetneq Y_3 \subsetneq ... \subsetneq Y_n$ eine Kette singulärer Unterräume von C_p und damit ist der Rang von C_p gleich $n-1$. □

Definition 5.13. Der Polarraum C_p aus Lemma 5.12. wird auch $Cone(p)$ genannt.

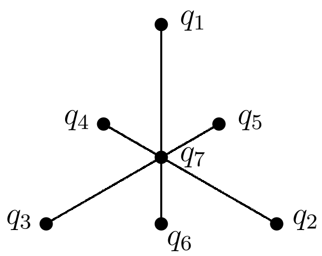
5.3 Polaritäten

Definition 5.14. Sei $\mathbb{P} = (P, L)$ ein projektiver Raum und $\pi \subseteq P \times P$ eine symmetrische Relation. Das heißt ist $(x, y) \in \pi$, dann ist auch $(y, x) \in \pi$. Es wird dann $(x, y) \in \pi$ auch geschrieben als $x \perp_\pi y$ oder einfach $x \perp y$. In diesem Fall heißen x und y dann *kollinear bezüglich* π. Für eine Teilmenge X von P setze $X^{\perp_\pi} := \{y \in P : x \perp_\pi y \text{ für alle } x \in X\}$ oder einfach $X^\perp$. Die Relation π heißt *Polarität* in $\mathbb{P}$, wenn für alle $x \in P$ die Menge $x^\perp$ entweder gleich P oder eine Hyperebene von P ist.

Beispiel 5.15. Betrachte den projektiven Raum $\mathbb{P}$:



Für $\mathbb{P}$ definiere eine Relation $\pi \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ durch den folgenden Punkt-Geraden-Raum:



wobei $(q_i, q_j) \in \pi$ genau dann gilt, wenn $q_i = q_j$ oder es eine Gerade gibt, die q_i und q_j enthält. Dann ist π eine Polarität, denn die Relation ist symmetrisch, $q_7^{\perp_\pi} = \mathbb{P}$ und für $1 \leq i \leq 6$ ist $q_i^{\perp_\pi}$ eine Gerade von $\mathbb{P}$ und damit Hyperebene.

Definition 5.16. Eine Polarität π heißt *nicht ausgeartet*, wenn $\mathbb{P}^{\perp_\pi} = \emptyset$.

Bemerkung 5.17. *Die Polarität π aus Beispiel 5.15. ist ausgeartet.*

Definition 5.18. Sei k ein Schiefkörper. Dann ist eine Abbildung $\sigma : k \to k$ ein *Antiautomorphismus*, wenn für alle $x, y \in k$ gilt, dass $(x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma$ und $(x \cdot y)^\sigma = y^\sigma \cdot x^\sigma$.

Definition 5.19. Sei k ein Schiefkörper, V ein Rechts-k-Vektorraum und $\sigma : k \to k$ ein Antiautomorphismus. Eine Abbildung $f : V \times V \to k$ heißt *σ-Sesquilinearform*, wenn sie biadditiv ist und wenn für alle x, $y \in V$ und

$a, b \in k$ gilt, dass $f(x \cdot a, y \cdot b) = a^\sigma \cdot f(x,y) \cdot b$ ist. Eine σ-Sesquilinearform f heißt *reflexiv*, wenn es $\varepsilon \in k^*$ gibt, so dass $f(x,y) = f(y,x)^\sigma \cdot \varepsilon$ für alle $x, y \in V$. In diesem Fall heißt f dann auch (σ, ε)-*hermitesch*.

Lemma 5.20. *Sei $\mathbb{P}(V) = (P, L)$ projektiver Raum eines k-Vektorraumes V und $f : V \times V \to k$ eine reflexive Sesquilinearform. Dann wird durch folgende Relation eine Polarität π auf $\mathbb{P}(V)$ induziert: Für x, $y \in P$ sei $x \perp_\pi y$ genau dann, wenn $f(x,y) = \{0\}$.*

Beweis. Aus der Reflexivität der Sesquilinearform f folgt die Symmetrie der Relation $\perp_\pi$.
Sei $p \in P$. Dann ist p eine Gerade durch den Ursprung in V, die von einem Element $p_1 \neq 0$ aus V erzeugt wird und l eine Ebene in V, die von zwei Elementen l_1, $l_2 \in V$ erzeugt wird. Ist $f(p_1, l_1) = 0$ oder $f(p_1, l_2) = 0$, dann gilt für die Punkte $a = \langle l_1 \rangle$, $b = \langle l_2 \rangle \in P_\pi$, die in l liegen, dass $p \perp_\pi a$ oder $p \perp_\pi b$ ist. Also folgt, dass p bzgl. π kollinear ist zu einem Punkt in l . Ist aber $f(p_1, l_1) = c \neq 0$ und $f(p_1, l_2) = d \neq 0$, dann ist $l_1 \cdot c^{-1} - l_2 \cdot d^{-1} \in V$ ein Element in der Ebene l in V und es gilt

$$
\begin{aligned}
f(p_1, l_1 \cdot c^{-1} - l_2 \cdot d^{-1}) &= f(p_1, l_1) \cdot c^{-1} - f(p_1, l_2) \cdot d^{-1} \\
&= c \cdot c^{-1} - d \cdot d^{-1} \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Es gilt also für den Punkt $\langle l_1 \cdot c^{-1} - l_2 \cdot d^{-1} \rangle = e \in P$, der in der Geraden $l \in L$ liegt, dass $p \perp_\pi e$. Damit ist p kollinear zu mindestens einem Punkt auf jeder Geraden aus L_π , also ist $p^{\perp_\pi}$ eine geometrische Hyperebene.
Ist nun $p \in P^{\perp_\pi}$, dann ist also $p \perp_\pi x$ für alle $x \in P$ und damit $p^{\perp_\pi} = P$.
Ist $p \notin P^{\perp_\pi}$, dann gibt es $x \in P \backslash p^{\perp_\pi}$. Sei $y \in P$. Dann ist y kollinear zu x und da $p^{\perp_\pi}$ geometrische Hyperebene in P ist, gibt es einen Punkt $z \in \langle x, y \rangle$ verschieden von y, der in $p^{\perp_\pi}$ liegt. Es ist also $x, z \in \left\langle p^{\perp_\pi}, x \right\rangle$ und damit auch $y \in \left\langle p^{\perp_\pi}, x \right\rangle$. Es folgt, dass $\left\langle p^{\perp_\pi}, x \right\rangle = P$ und damit ist $p^{\perp_\pi}$ Hyperebene von P. Also wird durch die Relation $\perp_\pi$ eine Polarität π induziert. ☐

Definition 5.21. Die Polarität π aus Lemma 5.20. heißt dann *repräsentiert durch* f und statt $\perp_\pi$ wird auch $\perp_f$ geschrieben.

Definition 5.22. Ein Unterraum $X \subseteq \mathbb{P}$ heißt *total isotrop* für eine Polarität π, wenn $X \subseteq X^{\perp_\pi}$.

5.4 Polarräume assoziiert zu hermiteschen Formen

Lemma 5.23. *Ist $f : V \times V \to k$ eine nicht triviale (σ, ε)-hermitesche Form, dann gilt:*

(i) *Zu jedem $t \in k$ gibt es $x, y \in V$ mit $f(x, y) = t$.*

(ii) $\varepsilon^\sigma = \varepsilon^{-1}$

(iii) $t^{\sigma^2} = \varepsilon \cdot t \cdot \varepsilon^{-1}$ *für alle $t \in k$*

Beweis.

(i) Seien $x, v \in V$. Ist $t = 0$, dann gilt:

$$f(x, 0) = f(x, v - v) = f(x, v) - f(x, v) = 0.$$

Es ist $f(x, y) = t$ also z.B. für $y = 0$.
Ist $t \in k^*$ und $v \in V$, dann setze $s := f(x, v)$. Also ist

$$f(x, v \cdot s^{-1} \cdot t) = f(x, v) \cdot s^{-1} \cdot t = s \cdot s^{-1} \cdot t = t$$

und damit $f(x, y) = t$ für $y = v \cdot s^{-1} \cdot t$.

(ii) Nach *(i)* gibt es $x, y \in V$, so dass $f(x, y) = \varepsilon$. Aus der Reflexivität von f folgt $\varepsilon = f(y, x)^\sigma \cdot \varepsilon$. Dann ist $f(y, x)^\sigma = 1$ und damit $f(y, x) = 1$. Also ist

$$\varepsilon^\sigma = f(x, y)^\sigma = f(x, y)^\sigma \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon^{-1} = f(y, x) \cdot \varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1}.$$

(iii) Nach *(i)* gibt es $x, y \in V$, so dass $f(x, y) = t$. Dann folgt mit *(ii)*:

$$\begin{aligned} t^{\sigma^2} &= (t^\sigma)^\sigma = (f(x, y)^\sigma)^\sigma = (f(x, y)^\sigma \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon^{-1})^\sigma = (f(y, x) \cdot \varepsilon^{-1})^\sigma \\ &= (\varepsilon^{-1})^\sigma \cdot f(y, x)^\sigma = (\varepsilon^{-1})^\sigma \cdot f(y, x)^\sigma \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon^{-1} \\ &= (\varepsilon^\sigma)^{-1} \cdot f(x, y) \cdot \varepsilon^{-1} = \varepsilon \cdot f(x, y) \cdot \varepsilon^{-1} = \varepsilon \cdot t \cdot \varepsilon^{-1} \end{aligned}$$

für alle $t \in k$.

□

Lemma 5.24. *(vgl. [7], 8.1.4.) Ist f eine (σ, ε)-hermitesche Form, dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) $f(x, y) = g(x, y) + g(y, x)^\sigma \cdot \varepsilon$, *für eine σ-Sesquilinearform $g : V \times V \to k$ und alle $x, y \in V$.*

(ii) $f(x,x) \in \{t + t^\sigma \cdot \varepsilon : t \in k\}$ *für alle* $x \in V$.

(iii) *Es gibt eine Basis* $(e_i)_{i \in I}$ *von* V*, so dass* $f(e_i, e_i) \in \{t + t^\sigma \cdot \varepsilon : t \in k\}$ *für alle* $i \in I$.

Beweis.

(i)$\Rightarrow$ *(ii)*: Ist $f(x,y) = g(x,y) + g(y,x)^\sigma \cdot \varepsilon$ für eine σ-Sesquilinearform $g : V \times V \to k$ und alle $x, y \in V$, dann folgt sofort, dass für alle $x \in V$ gilt, dass $f(x,x) = g(x,x) + g(x,x)^\sigma \cdot \varepsilon \in \{t + t^\sigma \cdot \varepsilon : t \in k\}$.

(ii)$\Rightarrow$ *(iii)*: Ist $f(x,x) \in \{t + t^\sigma \cdot \varepsilon : t \in k\}$ für alle $x \in V$, dann folgt sofort, dass für jede Basis $(e_i)_{i \in I}$ von V gilt, dass $f(e_i, e_i) \in \{t + t^\sigma \cdot \varepsilon : t \in k\}$ für alle $i \in I$.

(iii)$\Rightarrow$ *(i)*: Gibt es eine Basis $(e_i)_{i \in I}$ von V, so dass für alle $i \in I$ gilt, dass $f(e_i, e_i) \in \{t + t^\sigma \cdot \varepsilon : t \in k\}$, dann ordne I total und wähle $g_i \in k$, so dass $f(e_i, e_i) = g_i + g_i^\sigma \cdot \varepsilon$. Definiere eine σ-Sesquilinearform g wie folgt:

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases} f(e_i, e_j) & \text{falls } i < j \\ g_i & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i > j \end{cases}$$

Seien $x, y \in V$. Dann lassen sich x, y darstellen als Linearkombination der Basis, also $x = \sum\limits_{i \in I} e_i \cdot x_i$ und $y = \sum\limits_{j \in I} e_j \cdot y_j$. Nach der Rechnung aus Anhang A.1 ist dann $f(x,y) = g(x,y) + g(y,x)^\sigma \cdot \varepsilon$. Also folgt *(i)*.

$\square$

Definition 5.25. Eine (σ, ε)-hermitesche Form, die die Eigenschaften *(i)*, *(ii)* und *(iii)* aus Lemma 5.24. erfüllt, heißt *spurwertig*.

Definition 5.26. Sei $f : V \times V \to k$ eine (σ, ε)-hermitesche Form. Ein Unterraum X des Vektorraumes V heißt *singulär bzgl.* f, wenn X enthalten ist in der Menge $X^{\perp_f} := \{v \in V : f(x,v) = 0 \text{ für alle } x \in X\}$.

Lemma 5.27. *(vgl. [7], 8.1.3.) Sei* $f : V \times V \to k$ *eine nicht ausgeartete* (σ, ε)*-hermitesche Form. Seien* X *und* Y *zwei endlich dimensionale Unterräume von* V*, die maximal sind mit der Eigenschaft singulär bzgl.* f *zu sein. Dann haben* X *und* Y *dieselbe Dimension.*

Beweis. Haben X und Y dieselbe Dimension als Unterräume von $\langle X, Y \rangle$, dann haben sie auch dieselbe Dimension als Unterräume von V. Also können wir $V = \langle X, Y \rangle$ annehmen. Da X und Y endlich dimensional sind, ist dann

auch V endlich dimensional.
Die Schnittmenge $X \cap Y$ ist ein Unterraum sowohl von X als auch von Y. Sei X' der Komplementärraum von $X \cap Y$ in X und Y' der Komplementärraum von $X \cap Y$ in Y. Angenommen $dim(X') < dim(Y')$. Seien x und x' Elemente aus $X + (X'^{\perp_f} \cap Y')$. Dann gibt es $x_1, x_1' \in X$ und $x_2, x_2' \in (X'^{\perp_f} \cap Y')$, so dass $x = x_1 + x_2$ und $x' = x_1' + x_2'$. Da $x_1, x_1' \in X \subseteq X^{\perp_f}$ ist $f(x_1, x_1') = 0$ und da $x_2, x_2' \in Y' \subseteq Y \subseteq Y^{\perp} \subseteq Y'^{\perp_f}$ ist $f(x_2, x_2') = 0$. Außerdem sind $x_2, x_2' \in X'^{\perp_f} \cap Y'$ kollinear zu allen Elementen in X' und zu allen Elementen in Y, denn $Y' \subseteq Y \subseteq Y^{\perp_f}$. Also sind sie kollinear zu allen Elementen in X, denn $X \subseteq \langle X', Y \rangle$. Daher ist $f(x_1, x_2') = 0$ und $f(x_2, x_1') = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x, x') &= f(x_1 + x_2, x_1' + x_2') \\ &= f(x_1, x_1') + f(x_1, x_2') + f(x_2, x_1') + f(x_2, x_2') \\ &= f(x_1, x_2') + f(x_2, x_1') \\ &= 0 \end{aligned}$$

und damit ist $X + (X'^{\perp_f} \cap Y')$ singulär bzgl. f.
Es ist $dim(X') + dim(X'^{\perp_f}) = dim(V) = dim(Y') + dim(Y'^{\perp_f})$, denn f ist nicht ausgeartet. Dann gilt nach Annahme $dim(V) < dim(Y') + dim(X'^{\perp_f})$. Also ist $(X'^{\perp_f} \cap Y')$ nicht leer. Damit ist X echt in dem singulären Unterraum $X + (X'^{\perp_f} \cap Y')$ von V enthalten. Das ist aber ein Widerspruch zur Maximalität von X. Also ist $dim(X') = dim(Y')$ und damit haben auch X und Y dieselbe Dimension. $\square$

Definition 5.28. Die Dimension eines maximalen bzgl. f singulären Unterraumes X von V heißt der *Witt-Index von f*.

Theorem 5.29. *(vgl. [7], Theorem 8.3.4.) Sei $\mathbb{P}(V) = (P, L)$ ein projektiver Raum eines Vektorraumes V und $\pi \subseteq P \times P$ eine nicht ausgeartete Polarität repräsentiert durch eine spurwertige (σ, ε)-hermitesche Form f mit endlichem Witt-Index $n \geq 2$. Setze $S_\pi = (P_\pi, L_\pi)$, wobei $P_\pi = \{x \in P : x \perp_\pi x\}$ die Menge der Punkte und $L_\pi = \{l \in L : x \perp_\pi y$ für alle $x, y \in l\}$ die Menge der Geraden sei. Dann ist S_π ein Polarraum vom Rang n.*

Beweis. Zu zeigen ist also, dass die beiden Axiome aus Definition 5.1. gelten:

(i) Sei $p \in P_\pi$ und $l \in L_\pi$. Der Beweis, dass p bzgl. π kollinear ist zu mindestens einem Punkt in l, ist der gleiche wie in Lemma 5.20.
Sei nun $\left| p^{\perp_\pi} \cap l \right| \geq 2$. Das heißt es gibt $a, b \in l$ mit $p \perp_\pi a$ und $p \perp_\pi b$, also ist $f(p, a) = f(p, b) = \{0\}$. Sei $c \in l$ beliebig. Dann ist c genauso wie p, a und b Gerade durch den Ursprung in V. Seien $p' \in p$, $a' \in a$, $b' \in b$ und $c' \in c$ verschieden von 0. Dann ist c' linear abhängig von a'

und b' in V, also gibt es $\lambda, \mu \in k$, so dass $c' = a' \cdot \lambda + b' \cdot \mu$. Daher ist $f(p', c') = f(p', a' \cdot \lambda + b' \cdot \mu) = f(p', a') \cdot \lambda + f(p', b') \cdot \mu = 0$. Also ist $f(p, c) = \{0\}$ und daraus folgt, dass $p \perp_\pi c$. Damit ist $l \subseteq p^{\perp_\pi}$.

(ii) Da π nicht ausgeartet ist, gilt $P_\pi^{\perp_\pi} = \emptyset$ und damit $p^\perp \neq P_\pi$ für alle $p \in P_\pi$.

Also ist S_π ein Polarraum.
Wäre $X_1 \subsetneq ... \subsetneq X_m$ eine Kette singulärer Unterräume in S_π mit $m > n$, dann wäre $\langle X_1 \rangle \subsetneq ... \subsetneq \langle X_m \rangle$ eine Kette bzgl. f singulärer Unterräume in V und damit der Witt-Index größer als n. Also ist $Rang(S_\pi) \leq n$. Sei $X_1 \subsetneq ... \subsetneq X_n$ eine Kette singulärer Unterräume von V und Y_i die Menge der Geraden durch den Ursprung in V, die in X_i enthalten sind. Dann ist $Y_1 \subsetneq ... \subsetneq Y_n$ eine Kette singulärer Unterräume in S_π. Damit hat S_π also den Rang n. $\square$

Definition 5.30. Der Polarraum S_π aus Theorem 5.29. heißt *Polarraum assoziiert zu* π oder auch *Polarraum assoziiert zur hermiteschen Form* f und wird dann S_f genannt.

5.5 Polarräume assoziiert zu pseudo-quadratischen Formen

Lemma 5.31. *(vgl. [7], 8.2.1) Sei k ein Schiefkörper, V ein Rechts-k-Vektorraum, σ ein Antiautomorphismus von k und $\varepsilon \in k$, so dass $\varepsilon^\sigma = \varepsilon^{-1}$ und $t^{\sigma^2} = \varepsilon \cdot t \cdot \varepsilon^{-1}$. Setze $k_{\sigma,\varepsilon} := \{t - t^\sigma \cdot \varepsilon : t \in k\}$. Diese Menge ist eine Untergruppe der additiven Gruppe k. Für eine Abbildung $q : V \to k/k_{\sigma,\varepsilon}$ sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:*

(i) Es gibt eine σ-Sesquilinearform $g : V \times V \to k$, so dass für alle $x \in V$ gilt, dass $q(x) = g(x,x) + k_{\sigma,\varepsilon}$.

(ii) Für $a, y \in k$ und $x \in V$ ist $q(x \cdot a) = a^\sigma \cdot y \cdot a + k_{\sigma,\varepsilon}$ mit $y \in q(x)$ und es gibt eine spurwertige (σ,ε)-hermitesche Form $f : V \times V \to k$, so dass für alle $x, y \in V$ gilt, dass $q(x+y) = q(x) + q(y) + (f(x,y) + k_{\sigma,\varepsilon})$.

Beweis.

(i)$\Rightarrow$ (ii): Sei also eine σ- Sesquilinearform $g : V \times V \to k$ gegeben, so dass für alle $x \in V$ gilt, dass $q(x) = g(x,x) + k_{\sigma,\varepsilon}$. Dann gilt für $a, y \in k$ und $x \in V$:

$$\begin{aligned} q(x \cdot a) &= g(x \cdot a, x \cdot a) + k_{\sigma,\varepsilon} \\ &= a^\sigma \cdot g(x,x) \cdot a + k_{\sigma,\varepsilon} \\ &= a^\sigma \cdot y \cdot a + k_{\sigma,\varepsilon} \text{ mit } y \in q(x) \end{aligned}$$

Für den Raum V sei eine Abbildung $f : V \times V \to k$ definiert durch $f(x,y) = g(x,y) + g(y,x)^\sigma \cdot \varepsilon$. Dann gilt für alle $v, x, y, z \in V$:

$$\begin{aligned} f(x+y, v+z) &= g(x+y, v+z) + g(v+z, x+y)^\sigma \cdot \varepsilon \\ &= g(x,v) + g(x,z) + g(y,v) + g(y,z) \\ &\quad +(g(v,x) + g(v,y) + g(z,x) + g(z,y))^\sigma \cdot \varepsilon \\ &= g(x,v) + g(x,z) + g(y,v) + g(y,z) + g(v,x)^\sigma \cdot \varepsilon \\ &\quad +g(v,y)^\sigma \cdot \varepsilon + g(z,x)^\sigma \cdot \varepsilon + g(z,y)^\sigma \cdot \varepsilon \\ &= g(x,v) + g(v,x)^\sigma \cdot \varepsilon + g(x,z) + g(z,x)^\sigma \cdot \varepsilon \\ &\quad +g(y,v) + g(v,y)^\sigma \cdot \varepsilon + g(y,z) + g(z,y)^\sigma \cdot \varepsilon \\ &= f(x,v) + f(x,z) + f(y,v) + f(y,z) \end{aligned}$$

Also ist f biadditiv und außerdem gilt für $a, b \in k$:

$$\begin{aligned} f(x \cdot a, y \cdot b) &= g(x \cdot a, y \cdot b) + g(y \cdot b, x \cdot a)^\sigma \cdot \varepsilon \\ &= a^\sigma \cdot g(x,y) \cdot b + (b^\sigma \cdot g(y,x) \cdot a)^\sigma \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^\sigma \cdot g(x,y) \cdot b + a^\sigma \cdot g(y,x)^\sigma \cdot b^{\sigma^2} \cdot \varepsilon \\
&= a^\sigma \cdot g(x,y) \cdot b + a^\sigma \cdot g(y,x)^\sigma \cdot \varepsilon \cdot b \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon \\
&= a^\sigma \cdot g(x,y) \cdot b + a^\sigma \cdot g(y,x)^\sigma \cdot \varepsilon \cdot b \\
&= a^\sigma \cdot (g(x,y) + g(y,x)^\sigma \cdot \varepsilon) \cdot b \\
&= a^\sigma \cdot f(x,y) \cdot b
\end{aligned}$$

Damit ist f also eine σ-Sesquilinearform und weiter gilt:

$$\begin{aligned}
f(x,y)^\sigma \cdot \varepsilon &= (g(x,y) + g(y,x)^\sigma \cdot \varepsilon)^\sigma \cdot \varepsilon \\
&= g(x,y)^\sigma \cdot \varepsilon + (g(y,x)^\sigma \cdot \varepsilon)^\sigma \cdot \varepsilon \\
&= \varepsilon^\sigma \cdot g(y,x)^{\sigma^2} \cdot \varepsilon + g(x,y)^\sigma \cdot \varepsilon \\
&= \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon \cdot g(y,x) \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon + g(x,y)^\sigma \cdot \varepsilon \\
&= g(y,x) + g(x,y)^\sigma \cdot \varepsilon \\
&= f(y,x)
\end{aligned}$$

Also ist f eine (σ,ε)-hermitesche Form und, da *(i)* von Lemma 5.24. gilt, ist f spurwertig. Es gilt für alle $x, y \in V$:

$$\begin{aligned}
q(x+y) &= g(x+y, x+y) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
&= g(x,x) + g(x,y) + g(y,x) + g(y,y) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
&= q(x) + q(y) + (g(x,y) + g(y,x) + k_{\sigma,\varepsilon}) \\
&= q(x) + q(y) + (g(x,y) + g(y,x) \\
&\quad + g(y,x)^\sigma \cdot \varepsilon - (g(y,x)^\sigma \cdot \varepsilon)^\sigma \cdot \varepsilon + k_{\sigma,\varepsilon}) \\
&= q(x) + q(y) + (g(x,y) + g(y,x) \\
&\quad + g(y,x)^\sigma \cdot \varepsilon - \varepsilon^\sigma \cdot g(y,x)^{\sigma^2} \cdot \varepsilon + k_{\sigma,\varepsilon}) \\
&= q(x) + q(y) + (g(x,y) + g(y,x) \\
&\quad + g(y,x)^\sigma \cdot \varepsilon - \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon \cdot g(y,x) \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon + k_{\sigma,\varepsilon}) \\
&= q(x) + q(y) + (g(x,y) + g(y,x) + g(y,x)^\sigma \cdot \varepsilon \\
&\quad - g(y,x) + k_{\sigma,\varepsilon}) \\
&= q(x) + q(y) + (g(x,y) + g(y,x)^\sigma \cdot \varepsilon + k_{\sigma,\varepsilon}) \\
&= q(x) + q(y) + (f(x,y) + k_{\sigma,\varepsilon})
\end{aligned}$$

Also folgt *(ii)*.

(ii)$\Rightarrow$ *(i)*: Für $a, y \in k$ und $x \in V$ sei $q(x \cdot a) = a^\sigma \cdot y \cdot a + k_{\sigma,\varepsilon}$ mit $y \in q(x)$ und $f : V \times V \to k$ eine spurwertige (σ,ε)-hermitesche Form, so dass für alle $x, y \in V$ gilt, dass $q(x+y) = q(x) + q(y) + (f(x,y) + k_{\sigma,\varepsilon})$.

Dann folgt aus

$$\begin{aligned} q(x) + q(y) + (f(x,y) + k_{\sigma,\varepsilon}) &= q(x+y) \\ &= q(y+x) \\ &= q(y) + q(x) + (f(y,x) + k_{\sigma,\varepsilon}) \\ &= q(x) + q(y) + (f(y,x) + k_{\sigma,\varepsilon}), \end{aligned}$$

dass $f(x,y) + k_{\sigma,\varepsilon} = f(y,x) + k_{\sigma,\varepsilon}$ gilt. Sei nun $(e_i)_{i\in I}$ eine Basis von V, ordne I total und setze $q(e_i) = g_i + k_{\sigma,\varepsilon}$. Definiere eine Abbildung g wie im Beweis zu Lemma 5.24.:

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases} f(e_i, e_j) & \text{falls } i < j \\ g_i & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i > j \end{cases}$$

Aus der Rechnung aus Anhang A.2 folgt dann, dass $q(x) = g(x,x) + k_{\sigma,\varepsilon}$. Also gilt *(i)*.

□

Definition 5.32. Eine Abbildung $q : V \to k/k_{\sigma,\varepsilon}$, wie in Lemma 5.31., die die Bedingungen *(i)* und *(ii)* erfüllt, heißt (σ,ε)-*quadratische Form* oder auch *pseudoquadratische Form bzgl.* σ *und* ε.

Lemma 5.33. *Die spurwertige* (σ,ε)*-hermitesche Form* $f : V \times V \to k$ *aus Lemma 5.31.(ii) ist eindeutig bestimmt.*

Proof. Sei f' eine weitere Form, die die Bedingungen aus Lemma 5.31.*(ii)* erfüllt. Dann ist $h : V \times V \to k$ mit $h(x,y) = f(x,y) - f'(x,y)$ für $x, y \in V$ eine (σ,ε)-hermitesche Form, die Werte nur in $k_{\sigma,\varepsilon}$ hat. Angenommen h ist nicht trivial. Dann gibt es $a \in k_{\sigma,\varepsilon}\backslash\{0\}$ und $x, y \in V$, so dass $h(x,y) = a$. Sei $b \in k^*\backslash k_{\sigma,\varepsilon}$. Dann ist $h(x, y \cdot b \cdot a^{-1}) = h(x,y) \cdot a^{-1} \cdot b = a \cdot a^{-1} \cdot b = b$, aber das ist ein Widerspruch dazu, dass h nur Werte in $k_{\sigma,\varepsilon}$ hat. Also ist h trivial und damit $f = f'$. □

Bemerkung 5.34. *Die Form* f *ist also eindeutig bestimmt und damit wie im Beweis zu Lemma 5.31. gegeben durch* $f(x,y) = g(x,y) + g(y,x)^\sigma \cdot \varepsilon$ *für alle* $x, y \in V$.

Definition 5.35. Die Form f aus Lemma 5.31.*(ii)* heißt *zu* q *gehörige Sesquilinearform* und wird auch mit $\beta(q)$ bezeichnet. Durch $\beta(q)$ wird wie in Lemma 5.20. eine Orthogonalitätsrelation definiert, die analog dazu mit $\perp_{\beta(q)}$ bezeichnet wird.

Notation 5.36. *Die Elemente $x + k_{\sigma,\varepsilon}$ von $k/k_{\sigma,\varepsilon}$ werden im Folgenden auch mit $[x]_{\sigma,\varepsilon}$ bezeichnet.*

Definition 5.37. Eine pseudo-quadratische Form q heißt *nicht ausgeartet*, wenn die Dimension des Untervektorraumes $V^{\perp_{\beta(q)}} \cap q^{-1}([0]_{\sigma,\varepsilon})$ von V gleich 0 ist.

Definition 5.38. Sei q eine (σ, ε)-quadratische Form, sei $c \in k^*$ und sei $\sigma' : k \to k$ definiert durch $t^{\sigma'} = c \cdot t^{\sigma} \cdot c^{-1}$ und $\varepsilon' = c \cdot (c^{\sigma})^{-1} \cdot \varepsilon$. Dann ist $c \cdot k_{\sigma,\varepsilon} = k_{\sigma',\varepsilon'}$ und man kann eine Abbildung $cq : V \to k/k_{\sigma',\varepsilon'}$ definieren, die eine (σ', ε')-quadratische Form ist. Die Formen q und cq heißen dann *proportional.*

Definition 5.39. Sei $\mathbb{P}$ ein projektiver Raum eines Vektorraumes V. Eine Proportionalitätsklasse κ von pseudoquadratischen Formen in V heißt *projektive pseudoquadratische Form* in $\mathbb{P}$. Die Form κ heißt *nicht ausgeartet*, wenn es $q \in \kappa$ ist. Die Polarität, die durch $\beta(q)$ repräsentiert wird, wird auch mit $\beta(\kappa)$ bezeichnet und sie heißt *die Polarität assoziiert zu κ.*

Ist κ nicht ausgeartet, dann wird wie in Theorem 5.29. durch die Polarität $\beta(\kappa)$ assoziiert zu κ ein Polarraum $S_{\beta(\kappa)}$ definiert. Es kann aber auch auf andere Weise durch κ ein Polarraum konstruiert werden. Dazu wird zunächst folgende Relation definiert.

Definition 5.40. Seien V und q wie oben und $x, y \in V$. Dann schreibe $x \perp_q y$ genau dann, wenn $q(\langle x, y \rangle) = \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}$ gilt. Die Punkte x und y heißen dann *kollinear bzgl. q*. Für einen Unterraum X von V ist also $X^{\perp_q}$ die Menge der Elemente y aus V, für die gilt, dass $q(\langle x, y \rangle) = \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}$ für alle $x \in X$.

Definition 5.41. Eine Unterraum X von V heißt *singulär bzgl. q*, wenn $X \subseteq X^{\perp_q}$.

Lemma 5.42. *Sind $x, y \in V$ kollinear bzgl. q, dann gilt für $f := \beta(q)$, dass $f(x, y) = 0$ und damit $f(\langle x \rangle, \langle y \rangle) = \{0\}$ für die Geraden $\langle x \rangle, \langle y \rangle \subseteq V$.*

Beweis. Seien also $x, y \in V$ kollinear bzgl. q. Dann gilt für alle $a, b \in k$

$$\begin{aligned} [0]_{\sigma,\varepsilon} &= q(x \cdot a + y \cdot b) \\ &= q(x \cdot a) + q(y \cdot b) + f(x \cdot a, y \cdot b) + k_{\sigma,\varepsilon} \\ &= f(x \cdot a, y \cdot b) + k_{\sigma,\varepsilon} \end{aligned}$$

Also ist $f(x \cdot a, y \cdot b) \in k_{\sigma,\varepsilon}$ für alle $a, b \in k$ und damit $f(x, y) = c \in k_{\sigma,\varepsilon}$. Angenommen $c \neq 0$. Dann sei $d \in k \backslash k_{\sigma,\varepsilon}$ und es folgt

$$f(x, y \cdot d \cdot c^{-1}) = f(x, y) \cdot c^{-1} \cdot d = c \cdot c^{-1} \cdot d = d \notin k_{\sigma,\varepsilon}$$

Das ist ein Widerspruch, also ist $f(x, y) = 0$. ∎

Lemma 5.43. *(vgl. [7], 8.2.6.) Sei* $q : V \to k/k_{\sigma,\varepsilon}$ *eine nicht ausgeartete* (σ, ε)*-quadratische Form. Seien* X *und* Y *zwei endlich dimensionale Unterräume von* V*, die maximal sind mit der Eigenschaft singulär bzgl.* q *zu sein. Dann haben* X *und* Y *dieselbe Dimension.*

Beweis. Haben X und Y dieselbe Dimension als Unterräume von $\langle X, Y\rangle$, dann haben sie auch dieselbe Dimension als Unterräume von V. Also können wir $V = \langle X, Y\rangle$ annehmen. Da X und Y endlich dimensional sind, ist dann auch V endlich dimensional.
Die Schnittmenge $X \cap Y$ ist ein Unterraum sowohl von X als auch von Y. Sei X' der Komplemetärraum von $X \cap Y$ in X und Y' der Komplementärraum von $X \cap Y$ in Y. Angenommen $dim(X') < dim(Y')$. Seien x und x' Elemente aus $X + (X'^{\perp_q} \cap Y')$. Dann gibt es $x_1, x_1' \in X$ und $x_2, x_2' \in (X'^{\perp_q} \cap Y')$, so dass $x = x_1 + x_2$ und $x' = x_1' + x_2'$. Es ist $x_2 \in X'^{\perp_q} \cap Y'$ kollinear zu allen Elementen in X' und zu allen Elementen in Y, denn $Y' \subseteq Y \subseteq Y^{\perp_q}$. Also ist x_2 kollinear zu allen Elementen in X, denn $X \subseteq \langle X', Y\rangle$ und damit ist $x_1 \perp_q x_2$. Also folgt für $f := \beta(q)$ mit vorherigem Lemma 5.42., dass $f(x_1, x_2) = 0$. Genauso folgt $f(x_1, x_2') = f(x_1', x_2) = f(x_1', x_2') = 0$.
Dann ist

$$\begin{aligned}
& q(x \cdot a + x' \cdot b) \\
= \; & q((x_1 + x_2) \cdot a + (x_1' + x_2') \cdot b) \\
= \; & q(x_1 \cdot a + x_2 \cdot a + x_1' \cdot b + x_2' \cdot b) \\
= \; & q(x_1 \cdot a + x_1' \cdot b) + q(x_2 \cdot a + x_2' \cdot b) \\
& +[f(x_1 \cdot a + x_1' \cdot b, x_2 \cdot a + x_2' \cdot b)]_{\sigma,\varepsilon} \\
= \; & [f(x_1 \cdot a + x_1' \cdot b, x_2 \cdot a + x_2' \cdot b)]_{\sigma,\varepsilon} \\
= \; & [a^\sigma \cdot f(x_1, x_2) \cdot a + a^\sigma \cdot f(x_1, x_2') \cdot b \\
& +b^\sigma \cdot f(x_1', x_2) \cdot a + b^\sigma \cdot f(x_1', x_2') \cdot b]_{\sigma,\varepsilon} \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

und daher ist $X + (X'^{\perp_q} \cap Y')$ singulär bzgl. q.
Es ist $dim(X') + dim(X'^{\perp_q}) = dim(V) = dim(Y') + dim(Y'^{\perp_q})$, denn q ist nicht ausgeartet. Dann gilt nach Annahme $dim(V) < dim(Y') + dim(X'^{\perp_q})$. Also ist $(X'^{\perp_q} \cap Y')$ nicht leer. Damit ist X echt in dem singulären Unterraum $X + (X'^{\perp_q} \cap Y')$ von V enthalten. Das ist aber ein Widerspruch zur Maximalität von X. Also ist $dim(X') = dim(Y')$ und damit haben auch X und Y dieselbe Dimension. □

Definition 5.44. Die Dimension eines maximalen bzgl. q singulären Unterraumes X von V heißt der *Witt-Index von q*.

Theorem 5.45. *(vgl. [7], Theorem 8.4.2.) Sei $\mathbb{P}$ ein projektiver Raum eines Vektorraumes V und κ eine nicht ausgeartete projektive (σ, ε)-quadratische Form in $\mathbb{P}$ mit endlichem Witt-Index $n \geq 2$. Setze $S_\kappa := (P_\kappa, L_\kappa)$, wobei $P_\kappa := \{x \in \mathbb{P} : \kappa(x) = \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}\}$ und $L_\kappa := \{l \in \mathbb{P} : \kappa(l) = \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}\}$. Dann ist S_κ ein Polarraum vom Rang n.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass die beiden Axiome aus Defintion 5.1. gelten:

(i) Gibt es für zwei Punkte $x, y \in P_\kappa$ eine Gerade in L_κ, die diese beiden Punkte enthält, dann schreibe analog zu Definition 5.40. auch $x \perp_\kappa y$ oder x ist bzgl. κ kollinear zu y.
Seien $p \in P_\kappa$ und $l \in L_\kappa$. Es ist p eine Gerade in V, die von $p_1 \in V$ erzeugt wird und l eine Ebene in V, die von $l_1, l_2 \in V$ erzeugt wird. Ist $q(\langle p, \langle l_1 \rangle\rangle) = \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}$ oder $q(\langle p, \langle l_2 \rangle\rangle) = \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}$, dann ist sofort $p \perp_\kappa \langle l_1 \rangle$ oder $p \perp_\kappa \langle l_2 \rangle$. Ist aber $q(\langle p, \langle l_1 \rangle\rangle) \neq \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}$ und $q(\langle p, \langle l_2 \rangle\rangle) \neq \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}$, dann gibt es also $a, b, c, d \in k$, so dass $q(p_1 \cdot a + l_1 \cdot b) = [x_1]_{\sigma,\varepsilon} \neq [0]_{\sigma,\varepsilon}$ und $q(p_1 \cdot c + l_2 \cdot d) = [x_2]_{\sigma,\varepsilon} \neq [0]_{\sigma,\varepsilon}$. Dann ist also

$$\begin{aligned}
[x_1]_{\sigma,\varepsilon} &= q(p_1 \cdot a + l_1 \cdot b) \\
&= q(p_1 \cdot a) + q(l_1 \cdot b) + f(p_1 \cdot a, l_1 \cdot b) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
&= [0]_{\sigma,\varepsilon} + a^\sigma \cdot f(p_1, l_1) \cdot b + k_{\sigma,\varepsilon} \\
&= a^\sigma \cdot f(p_1, l_1) \cdot b + k_{\sigma,\varepsilon}
\end{aligned}$$

Also ist $f(p_1, l_1) =: a_1 \notin k_{\sigma,\varepsilon}$ und genauso folgt $f(p_1, l_2) =: a_2 \notin k_{\sigma,\varepsilon}$. Es ist $l_1 \cdot a_1^{-1} - l_2 \cdot a_2^{-1} \in l$ und da $\langle l_1 \rangle \perp_q \langle l_2 \rangle$, folgt mit Lemma 5.42. für alle $a, b \in k$

$$\begin{aligned}
& q(p_1 \cdot a + (l_1 \cdot a_1^{-1} - l_2 \cdot a_2^{-1}) \cdot b) \\
= \; & q(p_1 \cdot a) + q(l_1 \cdot a_1^{-1} \cdot b - l_2 \cdot a_2^{-1} \cdot b) \\
& + f(p_1 \cdot a, l_1 \cdot a_1^{-1} \cdot b - l_2 \cdot a_2^{-1} \cdot b) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \; & [0]_{\sigma,\varepsilon} + q(l_1 \cdot a_1^{-1} \cdot b - l_2 \cdot a_2^{-1} \cdot b) + a^\sigma \cdot f(p_1, l_1) \cdot a_1^{-1} \cdot b \\
& - a^\sigma \cdot f(p_1, l_2) \cdot a_2^{-1} \cdot b + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \; & q(l_1 \cdot a_1^{-1} \cdot b - l_2 \cdot a_2^{-1} \cdot b) \\
& + a^\sigma \cdot a_1 \cdot a_1^{-1} \cdot b - a^\sigma \cdot a_2 \cdot a_2^{-1} \cdot b + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \; & q(l_1 \cdot a_1^{-1} \cdot b) - q(l_2 \cdot a_2^{-1} \cdot b) - f(l_1 \cdot a_1^{-1} \cdot b, l_2 \cdot a_2^{-1} \cdot b) \\
& + a^\sigma \cdot b - a^\sigma \cdot b + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \; & [0]_{\sigma,\varepsilon} - f(l_1 \cdot a_1^{-1} \cdot b, l_2 \cdot a_2^{-1} \cdot b) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \; & (a_1^{-1} \cdot (-b))^\sigma \cdot f(l_1, l_2) \cdot b \cdot a_2^{-1} + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \; & [0]_{\sigma,\varepsilon}
\end{aligned}$$

Also ist $\langle p, \langle l_1 \cdot a_1^{-1} - l_2 \cdot a_2^{-1} \rangle \rangle$ eine Gerade in P_κ, die p und einen Punkt $\langle l_1 \cdot a_1^{-1} - l_2 \cdot a_2^{-1} \rangle$ aus l enthält und damit ist p kollinear zu mindestens einem Punkt jeder Geraden.
Seien $p \in P_\kappa$ und $l \in L_\kappa$, so dass $\left|p^{\perp_\kappa} \cap l\right| \geq 2$, das heißt es gibt $x, z \in l$, so dass $p \perp_\kappa x$ und $p \perp_\kappa z$. Also sind $\langle p, x\rangle$, $\langle p, z\rangle \in L_\kappa$. Sei also y ein weiterer Punkt der Geraden l und r ein Element der Geraden $\langle p, y\rangle$ aus $\mathbb{P}$. Zu zeigen ist jetzt also, dass $\kappa(r) = \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}$ ist, bzw., dass $q(r) = \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}$ für alle $q \in \kappa$. Seien also $q \in \kappa$ und Punkte $p' \in p$, $r' \in r$, $x' \in x$, $y' \in y$, $z' \in z$ aus V alle ungleich 0. Dann gibt es a, b, λ und $\mu \in k$, so dass $r' = p' \cdot a + y' \cdot b$ und $y' \cdot b = x' \cdot \lambda + z' \cdot \mu$. Mit Lemma 5.42. folgt für alle $c \in k$:

$$\begin{aligned}
& q(r' \cdot c) \\
= \ & q((p' \cdot a + y' \cdot b) \cdot c) \\
= \ & q((p' \cdot a + x' \cdot \lambda + z' \cdot \mu) \cdot c) \\
= \ & q(p' \cdot a \cdot c + x' \cdot \lambda \cdot c + z' \cdot \mu \cdot c) \\
= \ & q(p' \cdot a \cdot c) + q(x' \cdot \lambda \cdot c + z' \cdot \mu \cdot c) \\
& +[f(p' \cdot a \cdot c, x' \cdot \lambda \cdot c + z' \cdot \mu \cdot c)]_{\sigma,\varepsilon} \\
= \ & q(p' \cdot a \cdot c) + q(x' \cdot \lambda \cdot c) + q(z' \cdot \mu \cdot c) \\
& +[f(p' \cdot a \cdot c, x' \cdot \lambda \cdot c + z' \cdot \mu \cdot c)]_{\sigma,\varepsilon} + [f(x' \cdot \lambda \cdot c, z' \cdot \mu \cdot c)]_{\sigma,\varepsilon} \\
= \ & [f(p' \cdot a \cdot c, x' \cdot \lambda \cdot c)]_{\sigma,\varepsilon} + [f(p' \cdot a \cdot c, z' \cdot \mu \cdot c)]_{\sigma,\varepsilon} \\
& +[(\lambda \cdot c)^\sigma \cdot f(x', z') \cdot c \cdot \mu]_{\sigma,\varepsilon} \\
= \ & [(a \cdot c)^\sigma \cdot f(p', x') \cdot \lambda \cdot c]_{\sigma,\varepsilon} + [(a \cdot c)^\sigma \cdot f(p', z') \cdot \mu \cdot c]_{\sigma,\varepsilon} \\
= \ & [0]_{\sigma,\varepsilon}
\end{aligned}$$

Also ist $\langle p, y\rangle \in L_\kappa$ und damit $l \subseteq p^{\perp_\kappa}$.

(ii) Sei $p \in P_\kappa$. Dann ist $q(p) = [0]_{\sigma,\varepsilon}$ für alle $q \in \kappa$. Es ist p eine Gerade in V. Sie lässt sich also schreiben als $\langle p_1\rangle$ für ein Element $p_1 \in V$. Da $p \perp_q p$, folgt mit Lemma 5.42., dass $f(p_1, p_1) = 0$. Wie im Beweis zu Lemma 5.20. kann man zeigen, dass $p_1^{\perp_f}$ gleich V oder Hyperbene von V ist. Da q nicht ausgeartet ist, folgt, dass $p_1^{\perp_f} \neq V$. Also ist $p_1^{\perp_f}$ Hyperebene von V. Es gibt demnach ein Element $y_1 \in V$ mit $f(y_1, p_1) = c \neq 0$ und außerdem wähle y_1 so, dass $f(y_1, p_1) \notin k_{\sigma,\varepsilon}$.
Ist $g(y_1, y_1) = 0$, so ist $q(y_1) = [0]_{\sigma,\varepsilon}$ und damit $\langle y_1\rangle \in P_\kappa$.
Ist $g(y_1, y_1) = d \neq 0$, dann ist

$$\begin{aligned}
& q(y_1 + p_1 \cdot (-d) \cdot c^{-1}) \\
= \ & q(y_1) + q(p_1 \cdot (-d) \cdot c^{-1}) + f(y_1, p_1 \cdot (-d) \cdot c^{-1}) + k_{\sigma,\varepsilon}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= g(y_1, y_1) + f(y_1, p_1) \cdot c^{-1} \cdot (-d) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
&= d + c \cdot c^{-1} \cdot (-d) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
&= [0]_{\sigma,\varepsilon}
\end{aligned}
$$

Also ist $y := \langle y_1 + p_1 \cdot (-d) \cdot c^{-1} \rangle \in P_\kappa$ und es gilt:

$$
\begin{aligned}
& q(p_1 + (y_1 + p_1 \cdot (-d) \cdot c^{-1})) \\
= \; & q(p_1) + q((y_1 + (p_1 \cdot (-d) \cdot c^{-1})) \\
& + f(p_1, (y_1 + (p_1 \cdot (-d) \cdot c^{-1})) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \; & f(p_1, (y_1 + (p_1 \cdot (-d) \cdot c^{-1})) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \; & f(p_1, y_1) + f(p_1, p_1 \cdot (-d) \cdot c^{-1}) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \; & f(p_1, y_1) + f(p_1, p_1) \cdot b \cdot c^{-1} \cdot (-d) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \; & f(p_1, y_1) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \; & c + k_{\sigma,\varepsilon} \\
\neq \; & [0]_{\sigma,\varepsilon}
\end{aligned}
$$

Daher ist $p \not\perp_\kappa y$ und damit $p \notin P_\kappa^{\perp_\kappa}$.

Also ist S_κ ein Polarraum.
Wäre $X_1 \subsetneq ... \subsetneq X_m$ eine Kette singulärer Unterräume in S_κ mit $m > n$, dann wäre $\langle X_1 \rangle \subsetneq ... \subsetneq \langle X_m \rangle$ eine Kette bzgl. κ singulärer Unterräume in V und damit der Witt-Index größer als n. Also ist der Rang von $S_\kappa \leq n$. Sei $X_1 \subsetneq ... \subsetneq X_n$ eine Kette singulärer Unterräume von V und Y_i die Menge der Geraden durch den Ursprung in V, die in X_i enthalten sind. Dann ist $Y_1 \subsetneq ... \subsetneq Y_n$ eine Kette singulärer Unterräume in S_κ. Damit hat S_κ also den Rang n. □

Definition 5.46. Der Polarraum S_κ aus Theorem 5.45. heißt *Polarraum assoziiert zu* κ und die Kollinearitätsrelation, die sich durch diesen Polarraum ergibt, wird, wie im Beweis eingeführt, mit $\perp_\kappa$ bezeichnet.

6 Einbettungen von Polarräumen

Zunächst wird die Einbettung eines Polarraumes definiert und ein Beispiel gegeben. Darauf folgt ein Abschnitt, in dem der Fortsetzungssatz für Polarräume zitiert wird, er ist das Ergebnis der Arbeit [5] von Romain Hild und wird später im Beweis des Einbettungssatzes 6.10. in Abschnitt 6.3 verwendet. Im letzten Abschnitt folgt schließlich der Hauptteil dieser Arbeit, nämlich der Beweis des Einbettungssatzes von Veldkamp.

6.1 Definitionen und ein Beispiel

Definition 6.1. Sei S ein Polarraum. Eine *projektive Einbettung* von S ist ein Tripel $(\mathbb{P}, \pi, \varphi)$, bestehend aus einem projektiven Raum $\mathbb{P}$, einer Polarität π und einer injektiven Abbildung $\varphi : S \to \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}^{\perp(\pi)}$, so dass $\mathbb{P}$ von $\varphi(S)$ aufgespannt wird, das heißt $\mathbb{P}$ ist der kleinste Unterraum, der $\varphi(S)$ enthält. Für jede Gerade l in S ist $\varphi(l)$ Gerade in $\mathbb{P}$ mit $\varphi(l) \subseteq \varphi(l)^{\perp_\pi}$. Existiert eine solche Einbettung, so heißt S *(projektiv) einbettbar*.

Lemma 6.2. *(vgl. [7], 8.5.2.) Sei S ein Polarraum und $(\mathbb{P}, \pi, \varphi)$ eine projektive Einbettung von S. Dann sind zwei Punkte x und y in S genau dann kollinear, wenn $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ kollinear sind bezüglich π.*

Beweis.

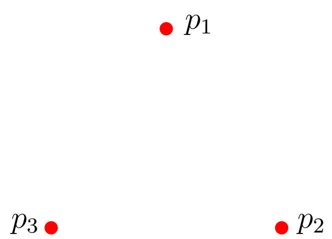
- Seien zunächst x und y zwei zueinander kollineare Punkte in S. Dann gibt es eine Gerade l in S, die diese beiden Punkte enthält. Nach der Definition einer Einbettung ist $\varphi(l)$ eine bzgl. π total isotrope Gerade, das heißt $\varphi(l) \subseteq \varphi(l)^{\perp_\pi}$, die außerdem $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ enthält. Also sind $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ kollinear bzgl. π.

- Seien nun x und y nicht kollinear in S und nehme an $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ seien kollinear bzgl. π. Die Menge $\varphi(x)^{\perp_\pi}$ ist laut Definition der Polarität gleich $\mathbb{P}$ oder eine Hyperebene von $\mathbb{P}$. Ist $\varphi(x)^{\perp_\pi} = \mathbb{P}$, dann ist also $\varphi(x) \in \mathbb{P}^{\perp_\pi}$. Das ist aber ein Widerspruch, denn $\varphi(S) \cap \mathbb{P}^{\perp_\pi} = \emptyset$. Also ist $\varphi(x)^{\perp_\pi}$ eine Hyperebene von $\mathbb{P}$. Angenommen es gibt ein $u \in S$, so dass $\varphi(u) \notin \varphi(x)^{\perp_\pi}$. Sei $v \in S$ kollinear zu beiden Punkten x und u. Sei l eine Gerade durch y, so dass $\left|v^\perp \cap l\right| = 1$ ist. Eine solche Gerade l existiert, denn sonst wäre $y^\perp = v^\perp$ und damit $v = y$, also $y = v \perp x$, was ein Widerspruch wäre. Sei s der Punkt auf l, der kollinear zu v ist. Setze $l' := \langle u, v\rangle$ und für jedes $t \in l \backslash \{s\}$ setze $l_t := \left\langle t, t^\perp \cap l'\right\rangle$. Es ist $l = \left\langle y, x^\perp \cap l\right\rangle$, denn $x \not\perp y$ und nach Annahme $\varphi(x) \perp_\pi \varphi(y)$. Da $\varphi(x)^{\perp_\pi}$ Hyperebene von $\mathbb{P}$ ist, also Unterraum, ist mit den beiden

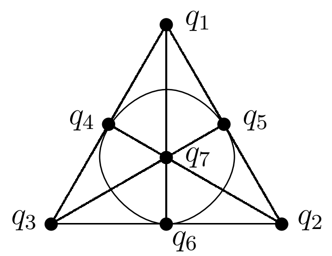
Punkten $\varphi(y)$ und $\varphi(x^\perp \cap l)$ die ganze Gerade $\varphi(l)$ in $\varphi(x)^{\perp_\pi}$ enthalten. Andererseits gilt für $u \in l'$, dass $\varphi(u) \notin \varphi(x)^{\perp_\pi}$ und daher ist auch $\varphi(l') \notin \varphi(x)^{\perp_\pi}$. Damit ist $\varphi(l') \cap \varphi(x)^{\perp_\pi} = \varphi(v)$. Also gilt für alle $t \in l \backslash \{s\}$, dass $\varphi(t^\perp \cap l') \notin \varphi(x)^{\perp_\pi}$, da $\varphi(v)$ der einzige Punkt von $\varphi(l')$ ist, der kollinear zu $\varphi(x)$ ist. Also ist $\varphi(l_t) \notin \varphi(x)^{\perp_\pi}$ und $\varphi(x^\perp \cap \langle t, t^\perp \cap l' \rangle) \in \varphi(l_t) \cap \varphi(x)^{\perp_\pi} = \varphi(t)$. Da φ injektiv ist, folgt dann $x^\perp \cap \langle t, t^\perp \cap l' \rangle = t$. Also ist x kollinear zu allen Punkten in $l \backslash \{s\}$. Daher ist er auch kollinear zu allen Punkten auf l und damit insbesondere auch zu y. Das widerspricht der Vorraussetzung, dass x und y nicht kollinear sind. Damit ist also $\varphi(S) \subseteq \varphi(x)^{\perp_\pi}$. Da $\langle \varphi(S) \rangle$ Schnitt aller Unterräume ist, die $\varphi(S)$ enthalten, und $\varphi(x)^{\perp_\pi}$ ein ebensolcher Unterraum ist, gilt $\mathbb{P} = \langle \varphi(S) \rangle \subseteq \varphi(x)^{\perp_\pi}$. Das widerspricht der Tatsache, dass $\varphi(x)^{\perp_\pi}$ Hyperebene und damit echter Unterraum von $\mathbb{P}$ ist. Also sind $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ nicht kollinear bzgl. π.

$\square$

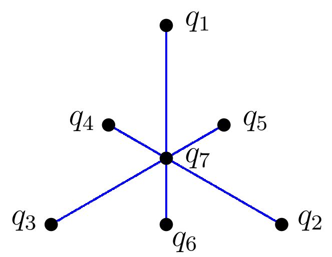
Beispiel 6.3. Betrachte den Polarraum $S = (P, L)$:



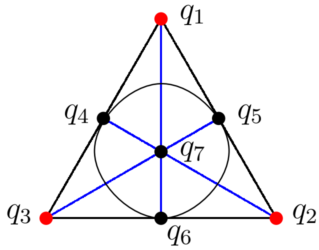
und den projektiven Raum $\mathbb{P}$:



Für $\mathbb{P}$ definiere die Polarität $\pi \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ wie in Beispiel 5.15., also durch den folgenden Punkt-Geraden-Raum:



wobei $(q_i, q_j) \in \pi$ genau dann, wenn $q_i = q_j$ oder es eine Gerade gibt, die q_i und q_j enthält.
Sei eine Abbildung $\varphi : S \to \mathbb{P} \backslash \mathbb{P}^{\perp_\pi}$ definiert durch $\varphi(p_i) = q_i$. Dann ist φ injektiv. Da $q_1, q_2, q_3 \in \langle \varphi(S) \rangle$, sind auch $q_4, q_5, q_6 \in \langle \varphi(S) \rangle$ und damit auch $q_7 \in \langle \varphi(S) \rangle$. Also ist $\mathbb{P} = \langle \varphi(S) \rangle$. Das heißt $\mathbb{P}$ wird aufgespannt von $\varphi(S) = \{q_1, q_2, q_3\}$. Da $L = \emptyset$ ist, gilt trivialerweise für jede Gerade $l \in L$, dass $\varphi(l)$ Gerade in $\mathbb{P}$ ist mit $\varphi(l) \subseteq \varphi(l)^{\perp_\pi}$. Also ist für den Polarraum S das Tripel $(\mathbb{P}, \pi, \varphi)$ eine Einbettung:



Definition 6.4. Ein *Morphismus* projektiver Räume $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}'$ ist eine Abbildung $\varphi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$, so dass für $c \in \langle a, b \rangle$ gilt, dass $\varphi(c) \in \langle \varphi(a), \varphi(b) \rangle$ für alle $a, b, c \in \mathbb{P}$, das heißt Kollinearität wird erhalten.

Definition 6.5. Ein Morphismus von einer Einbettung $(\mathbb{P}, \pi, \varphi)$ eines Polarraumes zu einer anderen $(\mathbb{P}', \pi', \varphi')$ ist ein Morphismus $\alpha : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ projektiver Räume, so dass $\varphi' = \alpha \circ \varphi$ gilt und für $x, y \in \mathbb{P}$ mit $(x, y) \in \pi$ sofort $(\alpha(x), \alpha(y)) \in \pi'$ folgt.

Definition 6.6. Eine Einbettung heißt *dominant*, wenn jeder Morphismus von einer anderen Einbettung zu ihr ein Isomorphismus ist.

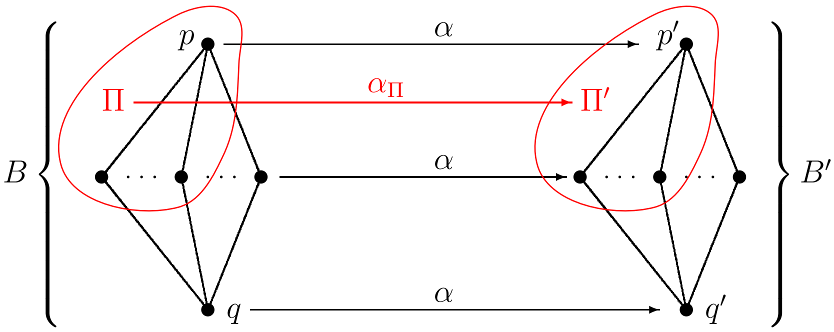
Theorem 6.7. *(vgl. [7], 8.6.(I)) Sei $(\mathbb{P}, \pi, \varphi)$ eine projektive Einbettung eines Polarraumes S vom Rang ≥ 2, wobei die Polarität π repräsentiert sei durch eine (σ, ε)-hermitesche Form. Dann gibt es die folgenden beiden Fälle:*

(i) Ist jede (σ, ε)-hermitesche Form spurwertig, dann ist π nicht ausgeartet, es ist $\varphi(S) = S_\pi$, die Einbettung $(\mathbb{P}, \pi, \varphi)$ ist dominant und jeder Morphismus von ihr zu einer anderen Einbettung ist ein Isomorphismus.

(ii) Ist nicht jede (σ, ε)-hermitesche Form spurwertig, dann gibt es eine Einbettung $(\overline{\mathbb{P}}, \overline{\pi}, \overline{\varphi})$ von S, einen Morphismus μ von $(\overline{\mathbb{P}}, \overline{\pi}, \overline{\varphi})$ nach $(\mathbb{P}, \pi, \varphi)$ und eine pseudo-quadratische Form $\overline{\kappa}$ in $\overline{\mathbb{P}}$, so dass $\overline{\pi} = \beta(\overline{\kappa})$ und $\overline{\varphi}(S) = S_{\overline{\kappa}}$. Der Morphismus μ (und damit auch die Einbettung $(\overline{\mathbb{P}}, \overline{\pi}, \overline{\varphi})$) ist eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus. Die Einbettung $(\overline{\mathbb{P}}, \overline{\pi}, \overline{\varphi})$ ist dominant.

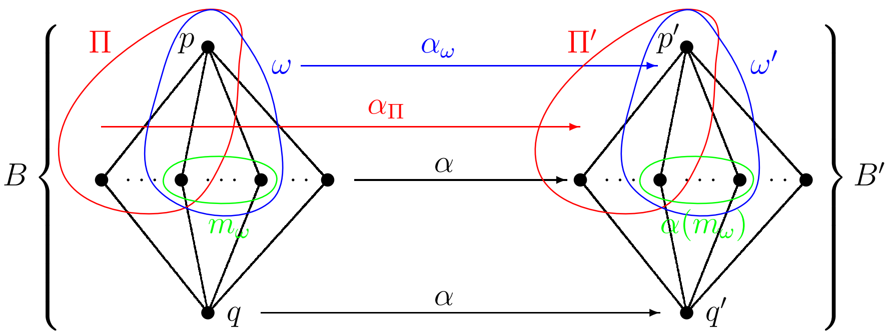
6.2 Fortsetzung von Isomorphismen zweier Polarräume

Seien $S = (P, L)$ und $S' = (P', L')$ zwei dicke Polarräume vom Rang ≥ 3. Seien (p, q) und (p', q') zwei Paare nicht kollinearer Punkte aus S. Setze $B := \{p, q\} \cup \{p, q\}^{\perp}$ und $B' := \{p', q'\} \cup \{p', q'\}^{\perp}$. Sei $\alpha : B \to B'$ ein Isomorphismus, so dass $\alpha(p) = p'$ und $\alpha(q) = q'$. Sei Π eine Ebene, die p enthält, Π' eine Ebene, die p' enthält und $\alpha_\Pi : S_\Pi \to S_{\Pi'}$ ein Isomorphismus, so dass α und α_Π auf $\Pi \cap B$ übereinstimmen.



Theorem 6.8. *(vgl. [5], 4.8) Alle Isomorphismen $i : B \cup \Pi \to B' \cup \Pi'$ lassen sich auf eindeutige Weise zu einem Isomorphismus von S nach S' fortsetzen.*

Lemma 6.9. *(vgl. [5], 4.6) Sei ω eine Ebene durch p, so dass $\omega \cap \Pi \in L$. Setze $m_\omega := \omega \cap \{p, q\}^{\perp}$ und $\omega' := \langle \alpha(m_\omega), p' \rangle$. Dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $\alpha_\omega : S_\omega \to S'_{\omega'}$, der auf $B \cap \omega$ mit α und auf $\Pi \cap \omega$ mit α_ω übereinstimmt.*



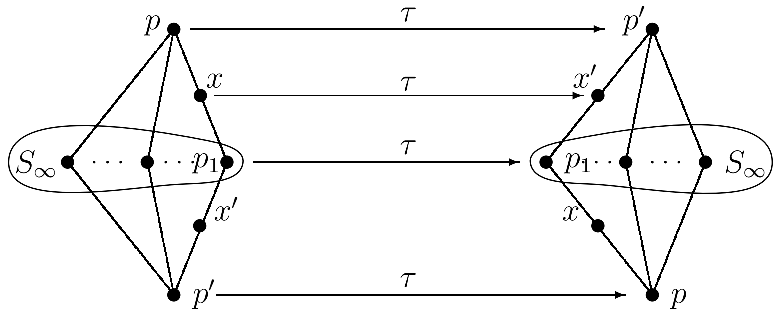
6.3 Einbettungssatz von Veldkamp

Einbettungssatz 6.10. *(Veldkamp, vgl. [7], Theorem 8.21.) Ein dicker Polarraum vom Rang ≥ 3, dessen maximale singuläre Unterräume desarguesch sind, ist projektiv einbettbar.*

Bemerkung 6.11. *Hat der Polarraum den Rang ≥ 4, dann sind die maximalen singulären Unterräume nach Theorem 5.10. projektive Räume der Dimension ≥ 3 und damit nach Theorem 3.10. sofort desarguesch. Die Forderung ist also nur für den Fall, dass der Rang gleich 3 ist, nötig.*

Beweis des Einbettungssatzes. Sei S ein dicker Polarraum vom Rang ≥ 3, dessen maximale Unterräume desarguesch sind. Seien p, $p' \in S$ zwei nicht-kollineare Punkte. Dann ist das Paar $S_{(p^\perp \cap q^\perp)} = ((p^\perp \cap q^\perp), L_{(p^\perp \cap q^\perp)})$ nach Lemma 5.5.*11.* ein Polarraum vom Rang $n-1$, der im Folgenden auch mit S_∞ bezeichnet wird. Für $X \subseteq S$ setze $X_\infty = X \cap S_\infty$. Sei weiter $L_p := p^\perp \backslash p'^\perp$ und $L_{p'} := p'^\perp \backslash p^\perp$.

Lemma 6.12. *(vgl. [7], 8.21.2.) Seien $x \in L_p \setminus \{p\}$ und $x' \in L_{p'} \setminus \{p'\}$, so dass gilt, dass $\langle p, x\rangle_\infty = \langle p', x'\rangle_\infty (=: p_1)$ ist. Dann gibt es einen eindeutigen Automorphismus τ von S, der S_∞ punktweise fixiert und p, x, p' jeweils auf p', x', p abbildet.*



Beweis. Da S_∞ Polarraum ist, existiert nach Lemma 5.7. ein Polarrahmen $F_\infty = \{p_i, p_{i'} : 1 \leq i \leq n-1\}$ in S_∞, wobei i und i' so gewählt seien, dass p_i und p'_i nicht kollinear sind. Dann ist $F = F_\infty \cup \{p, p'\}$ ein Polarrahmen von S, denn p und p' sind kollinear zu allen Punkten aus F_∞ aber nicht zueinander. Setze $M := \langle p, p_1, ..., p_{n-1}\rangle$ und $M' := \langle p', p_1, ..., p_{n-1}\rangle$. Da die Mengen $\{p, p_1, ..., p_{n-1}\}$ bzw. $\{p', p_1, ..., p_{n-1}\}$ singulär sind, sind M bzw. M' nach Lemma 5.5.*8.* und Theorem 5.10. projektive Räume. Es existiert dann nach Theorem 3.17. ein eindeutiger Isomorphismus $\psi : M \to M'$, der M_∞

punktweise fixiert, p auf p' und x auf x' abbildet.
Sei eine Abbildung $\psi' : B \to B$ definiert wie folgt:

$$\psi'(b) = \begin{cases} \psi(b) & \text{falls } b \in M \\ p & \text{falls } b = p' \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $l \in L_B$. Dann gibt es die folgenden drei Fälle:

1. $l \subseteq S_\infty$:
   Dann ist $\psi'(l) = l$ eine Gerade in L_B.

2. $l = \langle p, s\rangle$ für ein $s \in S_\infty$:
   Dann ist $l = \{p, s\}$ und $\psi'(l) = \psi'(\{p, s\}) = \{\psi'(p), \psi'(s)\} = \{p', s\}$, was wieder eine Gerade in L_B ist.

3. $l = \langle p', s\rangle$ für ein $s \in S_\infty$:
   Dann ist $l = \{p', s\}$ und $\psi'(l) = \psi'(\{p', s\}) = \{\psi'(p'), \psi'(s)\} = \{p, s\}$, was wieder eine Gerade in L_B ist.

Da $\psi' \circ \psi' = id_B$, also $\psi'^{-1} = \psi'$ ist, sind Urbilder von Geraden wieder Geraden. Also induziert ψ' eine Bijektion von L_B nach L_B und ist damit ein Isomorphismus.
Die Abbildungen ψ und ψ' stimmen auf $M \cap B$ überein und induzieren somit eine Abbildung $\varphi : M \cup B \to M' \cup B$. Sei $l \in L_{M\cup B}$. Dann gibt es die folgenden drei Fälle:

1. $l \in L_M$:
   Da ψ Isomorphismus von M nach M', ist $\psi(l)$ Gerade in $L_{M'}$, also Gerade in $L_{M'\cup B}$.

2. $l \in L_B$:
   Da ψ' Isomorphismus von B nach B, ist $\psi'(l)$ Gerade in L_B, also Gerade in $L_{M'\cup B}$.

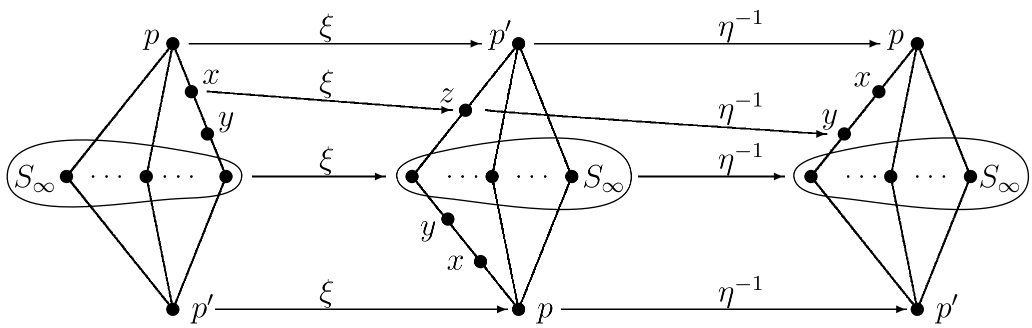
3. $l = \langle a, b\rangle$ mit $a \in M\backslash B$ und $b \in B\backslash M$:
   Angenommen es gibt mehr als einen Punkt aus M, der auf l liegt. Dann ist l sofort in M enthalten, da M Unterraum ist und damit wären wir wieder in Fall 1. Gibt es andererseits neben b einen weiteren Punkt x aus B, der auf l liegt, dann sind p und p' beide kollinear zu b und x. Nach Definition des Polarraumes sind sie dann sofort kollinear zu allen Punkten auf der Geraden l, also auch a. Damit ist aber $l \subseteq B$ und wir sind im 2. Fall. Also ist $l = \{a, b\}$.

Nach Korollar 5.11. spannen die paarweise kollinearen Punkte a, p und b eine projektive Ebene $\omega := \langle a, p, b\rangle$ auf. Sei $p_i \in M \cap S_\infty$. Dann spannen p_i, a und p eine projektive Ebene $\Pi := \langle p_i, a, p\rangle \subseteq M$ auf und es gilt $\omega \cap \Pi = \langle a, p\rangle \in L$. Außerdem wird Π von ψ auf eine projektive Ebene Π' abgebildet, die p' enthält. Setze $m_\omega := \omega \cap \{p, p'\}^\perp$ und $\omega' := \langle \psi'(m_\omega), p'\rangle = \langle m_\omega, p'\rangle$. Dann gibt es nach Lemma 6.9. einen eindeutigen Isomorphismus $\alpha_\omega : S_\omega \to S_{\omega'}$, der auf $B \cap \omega$ mit ψ' und auf $\Pi \cap \omega$ mit ψ übereinstimmt. Das heißt ω' ist projektive Ebene, die die Punkte $b = \psi(b)$ und $\psi(a)$ enthält und somit existiert eine Gerade $\langle \psi(b), \psi(a)\rangle$ in $L_{M' \cup B}$.

Genauso bildet φ^{-1} Geraden auf Geraden ab, also sind Urbilder von Geraden wieder Geraden und damit ist φ ein Isomorphismus.
Nach Theorem 6.8. lässt sich dieser Isomorphismus eindeutig zu einem Isomorphismus $\tau : S \to S$ fortsetzen. τ bildet dann also p, x, p' jeweils auf p', x', p ab. Ist $y \in M_\infty$, dann ist $\tau(y) = \varphi(y) = \psi(y) = y$. Ist $y \in S_\infty \backslash M_\infty$, dann folgt $y \in B_\infty \backslash (M_\infty \cup \{p, p'\})$, also ist $\tau(y) = \psi(y) = y$. Das heißt S_∞ wird von τ punktweise fixiert.
Die Eindeutigkeit folgt sofort aus der Konstruktion der Abbildung τ. $\square$

Lemma 6.13. *(vgl. [7], 8.21.3.) Seien $x, y \in L_p \setminus \{p\}$, so dass $y \in \langle p, x\rangle$. Dann gibt es einen eindeutigen Automorphismus ρ von S, der $S_\infty \cup \{p, p'\}$ punktweise fixiert und x auf y abbildet.*

Beweis. Sei $z \in L_{p'} \setminus \{p'\}$, so dass $\langle p, x\rangle_\infty = \langle p', z\rangle_\infty$. Dann gibt es nach vorherigem Lemma 6.12. einen eindeutigen Automorphismus ξ (bzw. η) von S, der p und p' vertauscht, S_∞ punktweise fixiert und x (bzw. y) auf z abbildet. Dann hat die Bijektion $\rho : S \to S$ mit $\rho = \eta^{-1} \circ \xi$ die gewünschte Eigenschaft, denn $S_\infty \cup \{p, p'\}$ wird offensichtlich von ρ punktweise fixiert und außerdem ist $\rho(x) = \eta^{-1}(\xi(x)) = \eta^{-1}(z) = y$.



Sei τ ein weiterer Automorphismus, der $S_\infty \cup \{p, p'\}$ punktweise fixiert und x auf y abbildet. Dann ist $\eta \circ \tau$ ein Automorphismus, der p und p' vertauscht,

S_∞ punktweise fixiert und für den gilt, dass $\eta \circ \tau(x) = \eta(y) = z$. Nach vorherigem Lemma 6.12. folgt dann $\eta \circ \tau = \xi$, also ist $\tau = \eta^{-1} \circ \xi = \rho$. Damit ist ρ eindeutig. $\square$

Mit k^* bezeichne die Gruppe aller Automorphismen von S, die $S_\infty \cup \{p, p'\}$ punktweise fixieren und mit $k = k^* \cup \{0\}$ die Menge, die man erhält, wenn man einen Punkt 0 zu k^* hinzufügt.
Lasse k von rechts auf $L_p \cup L_{p'}$ wie folgt operieren:

$$xa = \begin{cases} a^{-1}(x) & \text{wenn } a \in k^*, \\ p & \text{wenn } a = 0 \text{ und } x \in L_p \\ p' & \text{wenn } a = 0 \text{ und } x \in L_{p'}. \end{cases}$$

Sei X ein singulärer Unterraum von S der Dimension mindestens 2, der den Punkt p enthält. Dann ist X nach Theorem 5.10. ein projektiver Raum. Er ist enthalten in einem maximalen projektiven Raum und diese sind nach Vorraussetzung desarguesch. Damit ist X nach Korollar 3.14. desarguesch. Da X_∞ Hyperebene von X ist, ist $X \setminus X_\infty$ nach Lemma 4.4. ein affiner Raum. Es ist $p = \langle p_1 \rangle$ für ein $p_1 \in V$ und X_∞ eine Hyperebene in V. Dann lässt sich, wie im Beweis zu Lemma 4.4., jedes Element $x \in X \setminus X_\infty$ schreiben als $\langle p_1 + x_\infty \rangle$ mit einem eindeutigen Element x_∞ aus dem Vektorraum X_∞. Sei eine Abbildung $\vartheta : X \setminus X_\infty \to X_\infty$ definiert durch $\vartheta(x) = x_\infty$. Da X_∞ Unterraum von V ist, kann man also mit Hilfe von ϑ auf $X \setminus X_\infty$ durch X_∞ eine Rechts-Vektorraumstruktur über einem Schiefkörper k_X definieren.
Jede Gerade aus X, die den Punkt p enthält, enthält auch einen Punkt aus S_∞. Außerdem hält ein Element $a \in k$ den Punkt p und S_∞ fest, das heißt die anderen Punkte auf der Geraden werden unter a permutiert. Also wird jede affine Gerade aus X_∞, die den Punkt p enthält, auf sich abgebildet. Damit ist die Abbildung $x \to xa$ von $X \setminus X_\infty$ auf sich selbst eine Homothetie. Es gibt also ein Element $i_X(a) \in k_X$, so dass $xa = x \cdot i_X(a)$ für alle $x \in X \setminus X_\infty$. Nach Lemma 6.13. ist ein Automorphismus der $S_\infty \cup \{p, p'\}$ festhält und x auf $y := xa$ abbildet eindeutig, daher gibt es eine Bijektion $i_X : k \to k_X$.

Lemma 6.14. *(vgl. [7], 8.21.5.) Seien X und Y zwei singuläre Unterräume der Dimension mindestens zwei, die p enthalten. Dann ist die Abbildung $i_X \circ i_Y^{-1} : k_Y \to k_X$ ein Ringisomorphismus.*

Beweis. Ist $X = Y$, dann ist also $i_X \circ i_Y^{-1} = i_X \circ i_X^{-1}$ die Identitätsabbildung und damit sofort ein Ringisomorphismus.
Sind X und Y verschieden, dann seien X_1, X_2, X_3 zwei-dimensionale Unterräume, die p enthalten, so dass $X_1 \subseteq X$, $X_3 \subseteq Y$. Weiter gelte, dass

$dim(X_1 \cap X_2) = dim(X_2 \cap X_3) = 1$. Dass Unterräume mit diesen Eigenschaften existieren, ergibt sich aus folgender Konstruktion. Da X mindestens Dimension zwei hat, gibt es zwei Punkte x_1, x_2 aus X, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden mit p liegen. Da sie aber paarweise kollinear sind, spannen sie nach Korollar 5.11. eine projektive Ebene X_1 auf. Wähle nun zwei Punkte $x_1' \in Y \backslash X_1$ und $x_2' \in Y$, die zusammen mit p eine projektive Ebene X_3 aufspannen. In S existiert eine Gerade, die x_1' und einen Punkt x in $\langle x_1, x_2 \rangle$ verbindet. Dann ist $\langle x, p, x_1 \rangle$ eine projektive Ebene, die die für X_2 gewünschten Eigenschaften erfüllt.
Es sind $i_X \circ i_{X_1}^{-1} : k_{X_1} \to k_X$ und $i_{X_3} \circ i_Y^{-1} : k_Y \to k_{X_3}$ Ringisomorphismen. Daher reicht es zu zeigen, dass $i_{X_j} \circ i_{X_{j+1}}^{-1}$ ein Ringisomorphismus ist für $j = 1, 2$, denn dann wäre auch $i_X \circ i_{X_1}^{-1} \circ i_{X_1} \circ i_{X_2}^{-1} \circ i_{X_2} \circ i_{X_3}^{-1} \circ i_{X_3} \circ i_Y^{-1} = i_X \circ i_Y^{-1}$ ein Isomorphismus und der Beweis wäre fertig. Wir können also annehmen, dass $\dim(X) = \dim(Y) = 2$ und dass $\dim(X \cap Y) = 1$. Nach Theorem 3.17. gibt es einen Isomorphismus projektiver Räume $\rho : Y \to X$, der $X \cap Y$ punktweise fixiert und Y_∞ auf X_∞ abbildet. Ist X projektiver Raum des Vektorraumes V_X und Y projektiver Raum des Vektorraumes V_Y, dann ist ρ nach dem Hauptsatz der projektiven Geometrie induziert durch eine additive Bijektion der Vektorräume V_X und V_Y. Diese Abbildung wiederum induziert eine additive Bijektion der Vektorräume $Y \setminus Y_\infty$ und $X \setminus X_\infty$. Es gibt also einen Ringisomorphismus $\rho_* : k_Y \to k_X$. Für $x \in X \cap Y \setminus (X \cap Y)_\infty$ und $a \in k$ ist dann

$$x \cdot i_X(a) = xa = x \cdot i_Y(a) = \rho(x \cdot i_Y(a)) = \rho(x) \cdot \rho_*(i_Y(a)) = x \cdot \rho_*(i_Y(a)).$$

Es ist also $i_X = \rho_* \circ i_Y$, daher folgt $i_X \circ i_Y^{-1} = \rho_*$ und somit ist die Behauptung bewiesen. □

Wegen Lemma 6.14. kann dann auf k eine Schiefkörperstruktur definiert werden, so dass alle i_X zu Ringisomorphismen werden. Somit kann man k_X durch i_X mit k indentifizieren und dadurch wird $X \setminus X_\infty$ von einem Rechts-k_X-Vektorraum zu einem Rechts-k-Vektorraum.

Mit H bezeichne die Menge aller Paare $(x, y) \in L_p \times L_p$, für die es einen singulären Unterraum U gibt, der $\{p, x, y\}$ enthält. Dann ist $U \backslash U_\infty$ nach obiger Konstruktion Rechts-k-Vektorraum mit $p = 0$ und somit ist für solche Paare $(x, y) \in H$ die Summe $x + y$ definiert.

Nun wähle einen Automorphismus τ von S, der S_∞ punktweise fixiert und p und p' vertauscht. Die Menge k^* wird durch τ auf sich selbst transformiert, denn einerseites ist für alle $a \in k^*$ die Abbidung $\tau a \tau^{-1}$ ein Automorphismus von S, der $S_\infty \cup \{p, p'\}$ punktweise fixiert. Also ist $\tau a \tau^{-1} \in k^*$. Andererseits

ist für $b \in k^*$ auch $\tau^{-1} b \tau =: y \in k^*$, also ist $b = \tau y \tau^{-1}$.
Sei die Bijektion $\sigma : k \to k$ definiert durch

$$a^\sigma = \begin{cases} \tau a^{-1} \tau^{-1} & \text{wenn } a \in k^* \\ 0 & \text{wenn } a = 0 \end{cases}$$

und setze $\tau^2 = \varepsilon$.

Lemma 6.15. *Für σ und ε gilt:*

(i) $\varepsilon^\sigma = \varepsilon^{-1}$

(ii) $t^{\sigma^2} = \varepsilon t \varepsilon^{-1}$ *für alle* $t \in k^*$

Beweis.

(i) $\varepsilon^\sigma = \tau \varepsilon^{-1} \tau^{-1} = \tau \tau^{-1} \tau^{-1} \tau^{-1} = \tau^{-1} \tau^{-1} = \varepsilon^{-1}$

(ii) $t^{\sigma^2} = (\tau t^{-1} \tau^{-1})^\sigma = \tau (\tau t^{-1} \tau^{-1})^{-1} \tau^{-1} = \tau \tau t \tau^{-1} \tau^{-1} = \varepsilon t \varepsilon^{-1}$

□

Für $x, y \in L_p$ sei $u(x, y)$ der Punkt von $\langle p, y \rangle$, der kollinear ist zu $\tau(x)$. Er gehört zu S_∞ genau dann, wenn $\langle p, y \rangle_\infty$ kollinear ist zu $\tau(x)$, nämlich wenn $\langle p, y \rangle_\infty$ kollinear ist zu x oder äquivalent, wenn $(x, y) \in H$.
Sei eine Abbilung $g : L_p \times L_p \to k$ definiert wie folgt:

- Ist $(x, y) \in H$, dann sei $g(x, y) = 0$.
- Ist $(x, y) \notin H$, dann sei $g(x, y) \in k^*$, so dass $u(x, y) = y \cdot g(x, y)^{-1}$.

Bemerkung 6.16. *Es ist also $g(x, y)$ gerade das Element aus k^*, das y auf $u(x, y)$ abbildet. Dass es eindeutig und somit die Abbildung g wohldefiniert ist, folgt aus Lemma 6.13.*

Lemma 6.17. *(vgl. [7], 8.21.7., 8.21.8., 8.21.9.) Für $(y, y') \in H$ sowie $x, w, z \in L_p$ und $b \in k$ gilt:*

(i) $g(z, w) = g(w, z)^\sigma \cdot \varepsilon$

(ii) $g(w, z \cdot b) = g(w, z) \cdot b$ *und* $g(w \cdot b, z) = b^\sigma \cdot g(w, z)$

(iii) $g(x, y + y') = g(x, y) + g(x, y')$ *und* $g(y + y', x) = g(y, x) + g(y', x)$

Beweis.

(i)
- Ist $g(w, z) = 0$, dann ist auch $g(z, w) = 0$, denn die Relation $(w, z) \in H$ ist symmetrisch. Also folgt $g(z, w) = 0 = g(w, z)^\sigma \cdot \varepsilon$.

- Ist $g(w,z) = a \in k^*$, so sind $za^{-1} = a(z)$ und $\tau(w)$ kollinear und damit ist $(\tau a^{-1})(a(z)) = \tau(z)$ kollinear zu dem Punkt $(\tau a^{-1})(\tau(w)) = (\tau a^{-1}\tau^{-1} \cdot \tau^2)(w) = w \cdot (a^\sigma \cdot \varepsilon)^{-1}$. Also gilt die Gleichheit $u(z,w) = w \cdot (a^\sigma \cdot \varepsilon)^{-1}$ und damit $g(z,w)^{-1} = (a^\sigma \cdot \varepsilon)^{-1}$. Daher ist $g(z,w) = a^\sigma \cdot \varepsilon = g(w,z)^\sigma \cdot \varepsilon$.

(ii)

- Ist $(w,z) \in H$, dann gibt es einen singulären Unterraum U, der $\{w,z,p\}$ enthält. Aber dann enthält U auch $\{w, z \cdot b, p\}$, also ist $(w, z \cdot b) \in H$ und damit $g(w, z \cdot b) = 0 = g(w,z) \cdot b$.
- Ist $(w,z) \notin H$, dann ist auch $(w, z \cdot b) \notin H$. Also sind $g(w,z)$, $g(w, z \cdot b) \in k^*$, es gilt $u(w,z) = z \cdot g(w,z)^{-1} = (g(w,z))(z)$ und

$$\begin{aligned} u(w, z \cdot b) &= (z \cdot b) \cdot g(w, z \cdot b)^{-1} = z \cdot (b \cdot g(w, z \cdot b)^{-1}) \\ &= (g(w, z \cdot b) \cdot b^{-1})(z) \end{aligned}$$

  Außerdem ist $u(w,z) = u(w, z \cdot b)$, denn $\langle x, y \rangle = \langle x, y \cdot b \rangle$. Also ist auch $g(w,z) = g(w, z \cdot b) \cdot b^{-1}$ und damit $g(w, z \cdot b) = g(w,z) \cdot b$.

Dann folgt zusammen mit *(i)*:

$$\begin{aligned} g(w \cdot b, z) &= g(z, w \cdot b)^\sigma \cdot \varepsilon = (g(z,w) \cdot b)^\sigma \cdot \varepsilon = b^\sigma \cdot g(z,w)^\sigma \cdot \varepsilon \\ &= b^\sigma \cdot g(w,z) \end{aligned}$$

(iii)

- Ist $y' \in \langle p, y \rangle$, dann ist $y' = y \cdot a$ für ein $a \in k^*$ und mit *(ii)* folgt:

$$\begin{aligned} g(x, y + y') &= g(x, y + y \cdot a) = g(x, y \cdot (1 + a)) \\ &= g(x,y) \cdot (1 + a) = g(x,y) + g(x,y) \cdot a \\ &= g(x,y) + g(x, y \cdot a) = g(x, y') \end{aligned}$$

- Ist $y' \notin \langle p, y \rangle$, dann ist $Y = \langle p, y, y' \rangle$ nach Korollar 5.11. eine projektive Ebene, hat also Dimension 2.
  Wenn $\{x\} \times Y \subseteq H$, ist $g(x, Y) = \{0\}$ und die Behauptung folgt.
  Wenn $\{x\} \times Y \nsubseteq H$, so ist die Menge $\{z \in Y \setminus Y_\infty : g(x,z) = 1\}$, das heißt die Menge aller Punkte von $Y \setminus Y_\infty$, die kollinear zu $\tau(x)$ sind, eine affine Gerade in $Y \setminus Y_\infty$. Zusammen mit *(ii)* folgt dann die erste Behauptung.

Und aus *(i)* folgt dann auch:

$$\begin{aligned} g(y + y', x) &= (g(x, y + y'))^\sigma \cdot \varepsilon = (g(x,y) + g(x,y'))^\sigma \cdot \varepsilon \\ &= g(x,y)^\sigma \cdot \varepsilon + g(x,y')^\sigma \cdot \varepsilon = g(y,x) + g(y',x) \end{aligned}$$

$\square$

Lemma 6.18. *(vgl. [7], 8.21.10.) Die Abbildung σ ist ein Antiautomorphismus des Schiefkörpers k.*

Beweis. Seien $a, b \in k$. Dann gilt:

$$(ab)^\sigma = \tau(ab)^{-1}\tau^{-1} = \tau b^{-1}a^{-1}\tau^{-1} = (\tau b^{-1}\tau^{-1})(\tau a^{-1}\tau^{-1}) = b^\sigma a^\sigma$$

Nach Lemma 5.7. gibt es einen Polarrahmen $F = \{p_i, p_i' : 1 \leq i \leq n-1\}$ in S_∞, wobei i und i' so gewählt seien, dass p_i und p_i' nicht kollinear sind. Wähle vier Punkte $x \in \langle p, p_1\rangle$, $y \in \langle p, p_2\rangle$, $x' \in \langle p, p_1'\rangle$, $y' \in \langle p, p_2'\rangle$, so dass $g(x, x') = a$ und $g(y, y') = b$. Die Punkte p_2 und p_1' sind kollinear, daher erzeugen sie nach Korollar 5.11. zusammen mit p eine projektive Ebene.
Der Punkt x' (bzw. y) liegt auf der Geraden $\langle p, p_1'\rangle$ (bzw. $\langle p, p_2\rangle$), also ist x' (bzw. y) in dieser projektiven Ebene enthalten. Daher ist $(x', y) \in H$ und damit gilt $g(x', y) = 0 = g(y, x')$. Genauso folgt auch $g(x, y') = 0 = g(y', x)$. Also gelten mit *(i)* und *(iii)* aus Lemma 6.17. die folgenden Gleichheiten:

- $g(x+y, x') = g(x, x') + g(y, x') = g(x, x') = a.$
- $g(x'+y', x) = g(x', x) + g(y', x) = g(x', x) = g(x, x')^\sigma \cdot \varepsilon = a^\sigma \cdot \varepsilon$
- $g(x+y, y') = g(x, y') + g(y, y') = g(y, y') = b$
- $g(x'+y', y) = g(x', y) + g(y', y) = g(y', y) = g(y, y')^\sigma \cdot \varepsilon = b^\sigma \cdot \varepsilon$

Daraus folgt wieder mit *(iii)* aus Lemma 6.17. :

- $a + b = g(x+y, x') + g(x+y, y') = g(x+y, x'+y')$
- $a^\sigma \cdot \varepsilon + b^\sigma \cdot \varepsilon = g(x'+y', x) + g(x'+y', y) = g(x'+y', x+y)$

und aus diesen beiden Gleichungen folgt dann wegen *(i)* aus Lemma 6.17.:

$$\begin{aligned}(a+b)^\sigma &= g(x+y, x'+y')^\sigma \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon^{-1} = g(x'+y', x+y) \cdot \varepsilon^{-1} \\ &= (a^\sigma \cdot \varepsilon + b^\sigma \cdot \varepsilon) \cdot \varepsilon^{-1} = a^\sigma + b^\sigma\end{aligned}$$

□

Sei nun $\iota : L_p \to V$ eine Abbildung von L_p auf eine abelsche Gruppe V, die mit der Addition in L_p verträglich ist. Dabei sei V die abelsche Gruppe, die durch L_p erzeugt wird und durch die Relationen, gegeben durch die Summenoperation $+ : H \to L_p$, definiert wird. Das heißt V ist charakterisiert durch folgende universelle Eigenschaft: Gibt es eine weitere Abbildung $\bar{\iota} : L_p \to \overline{V}$ in eine abelsche Gruppe $\overline{V}$, die diese Relationen erfüllt, dann gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\eta : V \to \overline{V}$, so dass $\overline{\iota} = \eta \circ \iota$. Das heißt folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} L_p \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\overline{\iota}"'] & & V \arrow[dl, "\eta"] \\ & \overline{V} & \end{tikzcd}$$

Da skalare Multiplikationen mit Elementen aus k additive Abbildungen von L_p auf sich selbst sind, lassen sie sich eindeutig zu Endomorphismen von V fortsetzen. Das macht V dann zu einem k-Vektorraum.

Lemma 6.19. *(vgl. [7], 8.21.12.) Sei g definiert wie oben. Dann gibt eine eindeutige biadditive Funktion $f : V \times V \to k$, so dass $g = f \circ (\iota \times \iota)$. Diese Funktion ist eine (σ, ε)-hermitesche Form.*

Beweis. Durch g ist f eindeutig bestimmt auf den Erzeugern $\iota(L_p)$ von V und durch die Biadditivität von g dann auf ganz V. Angenommen es gibt $\overline{f} : \overline{V} \times \overline{V} \to k$ mit $g = \overline{f} \circ (\overline{\iota} \times \overline{\iota})$, wobei $\overline{V}$ und $\overline{\iota}$ wie oben seien. Dann gibt es also wegen der universellen Eigenschaft eine Abbildung η, so dass $\overline{\iota} = \eta \circ \iota$, und es folgt:

$$f \circ (\iota \times \iota) = g = \overline{f} \circ (\overline{\iota} \times \overline{\iota}) = \overline{f} \circ (\eta \circ \iota \times \eta \circ \iota)$$

Also ist $f = \overline{f} \circ \eta$. Dass f eine (σ, ε)-hermitesche Form ist, folgt aus *(i)*, *(ii)* und *(iii)* von Lemma 6.17. □

Lemma 6.20. *(vgl. [7], 8.21.13.) Die Abbildung ι ist injektiv.*

Beweis. Seien $x, y \in L_p$, so dass $\iota(x) = \iota(y)$. Es ist

$$g(x, y) = f(\iota(x), \iota(y)) = f(\iota(x), \iota(x)) = g(x, x) = 0$$

Also ist $(x, y) \in H$ und es gibt $z \in L_p$, so dass $x + z = y$. Nach Annahme ist $\iota(z) = \iota(y - x) = \iota(y) - \iota(x) = 0$. Also folgt

$$g(z, L_p) = f(\iota(z), \iota(L_p)) = f(0, \iota(L_p)) = \{0\}$$

Daher ist z kollinear zu allen Elementen aus L_p. Also ist $p^\perp \subseteq z^\perp$ und dann folgt aus Lemma 5.5.*10.*, dass $z = p$. Da p mit 0 identifiziert wurde, ist schließlich $x = y - z = y - p = y$. □

Lemma 6.21. *(vgl. [7], 8.21.14.) Sei $\mathbb{P}$ der projektive Raum von V, π die Polarität in $\mathbb{P}$, die durch f repräsentiert wird und ι_* die injektive Abbildung von $Cone(p)$ auf $\mathbb{P}$ induziert durch ι. Dann ist $(\mathbb{P}, \pi, \iota_*)$ eine dominante Einbettung des Polarraums $Cone(p)$.*

Beweis. Dass $(\mathbb{P}, \pi, \iota_*)$ eine Einbettung ist, ist klar. Also muss nur gezeigt werden, dass ein Morphismus μ von einer Einbettung $(\overline{\mathbb{P}}, \overline{\pi}, \lambda)$ von $Cone(p)$ nach $(\mathbb{P}, \pi, \iota_*)$ ein Isomorphismus ist. Wir können annehmen, dass $\overline{\mathbb{P}}$ projektiver Raum eines k-Vektorraumes $\overline{V}$ ist. Nach dem Hauptsatz der projektiven Geometrie 3.15. gibt es eine lineare Abbildung $\nu : \overline{V} \to V$, die μ induziert. Sei $\overline{\iota} : L_p \to \overline{V}$ wie folgt definiert: $\overline{\iota}(p) = 0$ und für $x \in L_p \setminus \{p\}$ sei $\overline{\iota}(x)$ der eindeutige Punkt von $\overline{V}$, so dass $\langle 0, \overline{\iota}(x)\rangle = \lambda(\langle p, x\rangle)$ und $\nu(\overline{\iota}(x)) = \iota(x)$. Es ist $\overline{\iota}(x)$ eindeutig, denn durch die Forderung $\langle 0, \overline{\iota}(x)\rangle = \lambda(\langle p, x\rangle)$ ist die Gerade in $\overline{V}$, auf der $\overline{\iota}(x)$ liegt, eindeutig bestimmt. Gibt es also ein $z \in \overline{V}$, so dass $\nu(z) = \iota(x) = \nu(\overline{\iota}(x))$, dann ist $z = \overline{\iota}(x) \cdot a$ für ein $a \in k$, also

$$\iota(x) = \nu(\overline{\iota}(x)) = \nu(\overline{\iota}(x) \cdot a) = \nu(\overline{\iota}(x)) \cdot a = \iota(x) \cdot a.$$

Daher ist $a = 1$ und damit $z = \overline{\iota}(x)$. Die Abbildung $\overline{\iota}$ ist additiv, denn:

$$\nu(\overline{\iota}(x + y)) = \iota(x + y) = \iota(x) + \iota(y) = \nu(\overline{\iota}(x)) + \nu(\overline{\iota}(y)) = \nu(\overline{\iota}(x) + \overline{\iota}(y))$$

und mit der oben gezeigten Eindeutigkeit des Elementes $\overline{\iota}(x + y)$ ist dann $\overline{\iota}(x+y) = \overline{\iota}(x) + \overline{\iota}(y)$. Da $\iota = \nu \circ \overline{\iota}$ ist, folgt aus der universellen Eigenschaft von ι, dass es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\eta : V \to \overline{V}$ gibt, so dass $\overline{\iota} = \eta \circ \iota$ ist. Also folgt $\overline{\iota} = \eta \circ \iota = \eta \circ \nu \circ \overline{\iota}$. Daher ist $\eta \circ \nu$ die Identitätsabbildung und damit ν ein Isomorphismus. □

Lemma 6.22. *(vgl. [7], 8.21.15.)*

(i) Ist jede (σ, ε)-hermitesche Form spurwertig, dann ist $\iota_*(Cone(p))$ der Polarraum assoziiert mit π.

(ii) Ist nicht jede (σ, ε)-hermitesche Form spurwertig, dann es gibt eine (σ, ε)-quadratische Form $q : V \to k$, so dass $\iota_*(Cone(p))$ der Polarraum assoziiert mit q ist.

Beweis.

- Ist jede (σ, ε)-hermitesche Form spurwertig, dann ist π nicht ausgeartet wegen Theorem 6.7.*(i)* und es ist $\iota_*(Cone(p)) = S_\pi$. Also gilt *(i)*.

- Ist nicht jede (σ, ε)-hermitesche Form spurwertig, dann gibt es nach Theorem 6.7.*(ii)* eine dominante Einbettung $(\overline{\mathbb{P}}, \overline{\pi}, \overline{\iota_*})$ von $Cone(p)$. Lemma 6.21. sagt, dass $(\mathbb{P}, \pi, \iota_*)$ bereits eine dominante Einbettung des Polarraums $Cone(p)$ ist, also ist $(\overline{\mathbb{P}}, \overline{\pi}, \overline{\iota_*}) = (\mathbb{P}, \pi, \iota_*)$. Weiter folgt aus Theorem 6.7., dass es eine (σ, ε)-quadratische Form q in $\mathbb{P}$ gibt, so dass $\pi = \beta(q)$. Außerdem ist $\iota_*(Cone(p)) = S_q$, also ist $\iota_*(Cone(p))$ der Polarraum assoziiert mit q und damit gilt *(ii)*.

Setze $V_1 = V \times k \times k$ und sei P_1 der projektive Raum des Vektorraumes V_1.

Im weiteren Verlauf des Beweises wird zwischen den folgenden beiden Fällen unterschieden: Dem Fall (i), dass jede (σ, ε)-hermitesche Form spurwertig ist und dem Fall (ii), dass nicht jede (σ, ε)-hermitesche Form spurwertig ist.

Fall (i): Jede (σ, ε)-hermitesche Form ist spurwertig

Lemma 6.23. *Sei die Form f definiert wie in Lemma 6.19. Dann ist die Abbildung $h : V_1 \times V_1 \to k$ mit $h((x,t,u),(x',t',u')) = f(x,x') + t^\sigma \cdot u' + u^\sigma \cdot \varepsilon \cdot t'$ eine (σ, ε)-hermitesche Form.*

Beweis. Seien (x,t,u), (x',t',u'), (a,b,c), $(a',b',c') \in V_1$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& h((x,t,u)+(x',t',u'),(a,b,c)+(a',b',c')) \\
= \; & h((x+x',t+t',u+u'),(a+a',b+b',c+c')) \\
= \; & f(x+x',a+a') + (t+t')^\sigma \cdot (c+c') + (u+u')^\sigma \cdot \varepsilon \cdot (b+b') \\
= \; & f(x,a) + f(x,a') + f(x',a) + f(x',a') + (t^\sigma + t'^\sigma) \cdot (c+c') \\
& +(u^\sigma + u'^\sigma) \cdot \varepsilon \cdot (b+b') \\
= \; & f(x,a) + f(x,a') + f(x',a) + f(x',a') + t^\sigma \cdot c + t^\sigma \cdot c' + t'^\sigma \cdot c + t'^\sigma \cdot c' \\
& +u^\sigma \cdot \varepsilon \cdot b + u^\sigma \cdot \varepsilon \cdot b' + u'^\sigma \cdot \varepsilon \cdot b + u'^\sigma \cdot \varepsilon \cdot b' \\
= \; & f(x,a) + t^\sigma \cdot c + u^\sigma \cdot \varepsilon \cdot b + f(x,a') + t^\sigma \cdot c' + u^\sigma \cdot \varepsilon \cdot b' \\
& +f(x',a) + t'^\sigma \cdot c + u'^\sigma \cdot \varepsilon \cdot b + f(x',a') + t'^\sigma \cdot c' + u'^\sigma \cdot \varepsilon \cdot b' \\
= \; & h((x,t,u),(a,b,c)) + h((x,t,u),(a',b',c')) + h((x',t',u'),(a,b,c)) \\
& +h((x',t',u'),(a',b',c'))
\end{aligned}$$

und weiter gilt für $\alpha, \beta \in k$:

$$\begin{aligned}
h((x,t,u)\cdot\alpha,(a,b,c)\cdot\beta) &= h((x\cdot\alpha, t\cdot\alpha, u\cdot\alpha),(a\cdot\beta, b\cdot\beta, c\cdot\beta)) \\
&= f(x\cdot\alpha, a\cdot\beta) + (t\cdot\alpha)^\sigma \cdot c \cdot \beta \\
&\quad +(u\cdot\alpha)^\sigma \cdot \varepsilon \cdot b \cdot \beta \\
&= \alpha^\sigma \cdot f(x,a) \cdot \beta + \alpha^\sigma \cdot t^\sigma \cdot c \cdot \beta \\
&\quad +\alpha^\sigma \cdot u^\sigma \cdot \varepsilon \cdot b \cdot \beta \\
&= \alpha^\sigma (f(x,a) + t^\sigma \cdot c + u^\sigma \cdot \varepsilon \cdot b) \cdot \beta \\
&= \alpha^\sigma \cdot h((x,t,u),(a,b,c)) \cdot \beta
\end{aligned}$$

also ist h eine σ-Sesquilinearform und außerdem gilt wegen Lemma 6.15.:

$$\begin{aligned}
(h((x,t,u),(a,b,c)))^\sigma \cdot \varepsilon &= (f(x,a) + t^\sigma \cdot c + u^\sigma \cdot \varepsilon \cdot b)^\sigma \cdot \varepsilon \\
&= f(x,a)^\sigma \cdot \varepsilon + (t^\sigma \cdot c)^\sigma \cdot \varepsilon + (u^\sigma \cdot \varepsilon \cdot b)^\sigma \cdot \varepsilon \\
&= f(a,x) + c^\sigma \cdot t^{\sigma^2} \cdot \varepsilon + b^\sigma \cdot \varepsilon^\sigma \cdot u^{\sigma^2} \cdot \varepsilon \\
&= f(a,x) + c^\sigma \cdot \varepsilon \cdot t \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon \\
&\quad + b^\sigma \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon \cdot u \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon \\
&= f(a,x) + c^\sigma \cdot \varepsilon \cdot t + b^\sigma \cdot u \\
&= f(a,x) + b^\sigma \cdot u + c^\sigma \cdot \varepsilon \cdot t \\
&= h((a,b,c),(x,t,u))
\end{aligned}$$

Also ist h eine (σ, ε)-hermitesche Form. □

Nach Theorem 5.29. definiert die durch h repräsentierte Polarität γ auf dem projektiven Raum P_1 von V_1 einen Polarraum S_1. Es ist also (P_1, γ, i_{S_1}) mit $i_{S_1} : S_1 \to P_1$ als Inklusionsabbildung eine Einbettung von S_1.

Notation 6.24. Die Gerade $\langle (0,0,0),(a,b,c) \rangle$ durch den Ursprung in V_1 bezeichne ab sofort mit $\langle (a,b,c) \rangle$. Sie ist ein Punkt im projektiven Raum P_1.

Definiere eine Abbildung $\varphi : (L_p \cup S_\infty) \cup \{p'\} \to S_1$ wie folgt:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \langle (\iota(x), 0, 1) \rangle, & \text{falls } x \in L_p \\ \langle (\iota(y), 0, 0) \rangle, & \text{falls } x \in S_\infty \text{ und } x = \langle p, y \rangle_\infty, \text{ wobei } y \in L_p \backslash \{p\} \\ \langle (0,1,0) \rangle, & \text{falls } x = p' \end{cases}$$

Ist $x \in S_\infty$ und $x = \langle p, z \rangle_\infty = \langle p, s \rangle_\infty$ für $s \neq z \in L_p \backslash \{p\}$, also $z = s \cdot a$ für ein $a \in k$, dann ist $\varphi(x) = \langle (\iota(z), 0, 0) \rangle$. Andererseits ist aber auch $\varphi(x) = \langle (\iota(s), 0, 0) \rangle$. Es ist allerdings

$$\langle (\iota(z),0,0) \rangle = \langle (\iota(s \cdot a),0,0) \rangle = \langle (\iota(s) \cdot a,0,0) \rangle = \langle (\iota(s),0,0) \rangle$$

und damit ist φ wohldefiniert.

Die Mengen $(L_p \cup S_\infty) \cup \{p'\}$ und $p^\perp \cup \{p'\}$ sind gleich und im Folgenden schränke den Bildraum von φ ein auf das Bild $\varphi(p^\perp \cup \{p'\})$.

Lemma 6.25. *Die Abbildung $\varphi : p^\perp \cup \{p'\} \to \varphi(p^\perp \cup \{p'\})$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Es ist klar, dass φ surjektiv ist.
Ist $\varphi(x) = \varphi(y)$ für $x, y \in L_p$, dann ist $\langle (\iota(x),0,1) \rangle = \langle (\iota(y),0,1) \rangle$. Es gibt also $a \in k$, so dass $(\iota(x),0,1) = (\iota(y),0,1) \cdot a$. Daher folgt, dass $(\iota(x),0,1) = (\iota(y) \cdot a, 0, a)$ und damit $a = 1$ und $\iota(x) = \iota(y)$. Also ist $x = y$, denn nach Lemma 6.20. ist ι injektiv.
Ist $\varphi(x) = \varphi(y)$ für $x, y \in S_\infty$ und $x = \langle p, z \rangle_\infty$ bzw. $y = \langle p, s \rangle_\infty$ mit

$z, s \in L_p \backslash \{p\}$, dann ist $\langle(\iota(z), 0, 0)\rangle = \langle(\iota(s), 0, 0)\rangle$. Es gibt also $a \in k$, so dass $(\iota(z), 0, 0) = (\iota(s), 0, 0) \cdot a$. Also ist $(\iota(z), 0, 0) = (\iota(s) \cdot a, 0, 0)$ und damit $\iota(z) = \iota(s) \cdot a$. Dann folgt, dass $\iota(z) = \iota(s \cdot a)$ und daher $z = s \cdot a$, wegen der Injektivität von ι. Also gilt $\langle p, z\rangle = \langle p, s \cdot a\rangle = \langle p, s\rangle$ in S und schließlich ist $x = \langle p, z\rangle_\infty = \langle p, s\rangle_\infty = y$.
Also ist φ bijektiv.

Zeige als nächstes, dass zwei Punkte x und y in $p^\perp \cup \{p'\}$ kollinear sind bezüglich $\perp$, genau dann, wenn ihre Bilder $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ kollinear sind bezüglich $\perp_\gamma$.

- Seien $x, y \in L_p$.
  Sei zunächst $x \perp y$. Dann ist $x, y \in H$, also $g(x, y) = 0$. Es ist $h(\varphi(x), \varphi(y)) = h(\langle(\iota(x), 0, 1)\rangle, \langle(\iota(y), 0, 1)\rangle)$ und es gilt für alle $a, b \in k$:

$$\begin{aligned} & h((\iota(x), 0, 1) \cdot a, (\iota(y), 0, 1) \cdot b) \\ = \; & h((\iota(x) \cdot a, 0, a), (\iota(y) \cdot b, 0, b)) \\ = \; & f(\iota(x) \cdot a, \iota(y) \cdot b) + 0^\sigma \cdot b + a^\sigma \cdot \varepsilon \cdot 0 \\ = \; & a^\sigma \cdot g(x, y) \cdot b \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

  Also ist $\varphi(x) \perp_\gamma \varphi(y)$.
  Ist umgekehrt $\varphi(x) \perp_\gamma \varphi(y)$, dann ist $h(\varphi(x), \varphi(y)) = 0$. Also gilt für alle $a, b \in k$:

$$\begin{aligned} 0 &= h((\iota(x), 0, 1) \cdot a, (\iota(y), 0, 1) \cdot b) \\ &= h((\iota(x) \cdot a, 0, a), (\iota(y) \cdot b, 0, b)) \\ &= f(\iota(x) \cdot a, \iota(y) \cdot b) + 0^\sigma \cdot b + a^\sigma \cdot \varepsilon \cdot 0 \\ &= a^\sigma \cdot g(x, y) \cdot b \end{aligned}$$

  Es folgt also $g(x, y) = 0$ und damit ist $x \perp y$.

- Seien $x, y \in S_\infty$ mit $x = \langle p, z\rangle_\infty$ bzw. $y = \langle p, s\rangle_\infty$, wobei $z, s \in L_p \backslash \{p\}$.
  Sei zunächst $x \perp y$, dann ist $z \perp s$, also $g(z, s) = 0$. Außerdem ist $h(\varphi(x), \varphi(y)) = h(\langle(\iota(z), 0, 0)\rangle, \langle(\iota(s), 0, 0)\rangle)$ und es gilt für alle $a, b \in k$:

$$\begin{aligned} h((\iota(z), 0, 0) \cdot a, (\iota(s), 0, 0) \cdot b) &= f(\iota(z) \cdot a, \iota(s) \cdot b) \\ &= a^\sigma \cdot g(z, s) \cdot b \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $\varphi(x) \perp_\gamma \varphi(y)$.
Ist umgekehrt $\varphi(x) \perp_\gamma \varphi(y)$, dann ist also $h(\varphi(x), \varphi(y)) = 0$. Also gilt für alle $a, b \in k$:

$$\begin{aligned} 0 &= h((\iota(z), 0, 0) \cdot a, (\iota(s), 0, 0) \cdot b) \\ &= f(\iota(z) \cdot a, \iota(s) \cdot b) \\ &= a^\sigma \cdot g(z, s) \cdot b \end{aligned}$$

Es folgt also $g(z, s) = 0$, also ist $z \perp s$ und damit $x \perp y$.

- Seien $x \in L_p$ und $y \in S_\infty$, wobei $y = \langle p, s \rangle_\infty$ mit $s \in L_p \backslash \{p\}$.
  Sei zunächst $x \perp y$. Dann ist $x \perp s$, also $g(x, s) = 0$. Außerdem ist $h(\varphi(x), \varphi(y)) = h(\langle(\iota(x), 0, 1)\rangle, \langle(\iota(s), 0, 0)\rangle)$ und es gilt für alle $a, b \in k$:

$$\begin{aligned} & h((\iota(x), 0, 1) \cdot a, (\iota(s), 0, 0) \cdot b) \\ = \; & h((\iota(x) \cdot a, 0, a), (\iota(s) \cdot b, 0, 0)) \\ = \; & f(\iota(x) \cdot a, \iota(s) \cdot b) + 0^\sigma \cdot 0 + a^\sigma \cdot \varepsilon \cdot 0 \\ = \; & a^\sigma \cdot f(\iota(x), \iota(s)) \cdot b \\ = \; & a^\sigma \cdot g(x, s) \cdot b \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

  Also ist $\varphi(x) \perp_\gamma \varphi(y)$.
  Ist umgekehrt $\varphi(x) \perp_\gamma \varphi(y)$, dann ist $h(\varphi(x), \varphi(y)) = 0$. Also gilt für alle $a, b \in k$:

$$\begin{aligned} 0 &= h((\iota(x), 0, 1) \cdot a, (\iota(s), 0, 0) \cdot b) \\ &= h((\iota(x) \cdot a, 0, a), (\iota(s) \cdot b, 0, 0)) \\ &= f(\iota(x) \cdot a, \iota(s) \cdot b) + 0^\sigma \cdot 0 + a^\sigma \cdot \varepsilon \cdot 0 \\ &= a^\sigma \cdot f(\iota(x), \iota(s)) \cdot b \\ &= a^\sigma \cdot g(x, s) \cdot b \end{aligned}$$

  Es folgt also $g(x, s) = 0$, also $x \perp s$ und damit $x \perp y$.

- Sei nun $x \perp p'$ für ein $x \in p^\perp \cup \{p'\}$. Dann ist also $x = p'$ oder $x \in S_\infty$.

  1. Ist $x = p'$, dann ist $h(\varphi(p'), \varphi(p')) = h(\langle(0, 1, 0)\rangle, \langle(0, 1, 0)\rangle)$ und es gilt für alle $a, b \in k$:

$$\begin{aligned} h((0, 1, 0) \cdot a, (0, 1, 0) \cdot b) &= h((0, a, 0), (0, b, 0)) \\ &= f(0, 0) + a^\sigma \cdot 0 + 0 \cdot \varepsilon \cdot b \\ &= 0 \end{aligned}$$

     Also ist $\varphi(p') \perp_\gamma \varphi(p')$.

2. Ist $x \in S_\infty$, wobei $x = \langle p, z\rangle_\infty$ mit $z \in L_p \backslash \{p\}$, dann ist $h(\varphi(p'), \varphi(x)) = h(\langle(0,1,0)\rangle, \langle(\iota(z),0,0)\rangle)$ und es gilt für alle $a, b \in k$:

$$\begin{aligned} h((0,1,0)\cdot a, (\iota(z),0,0)\cdot b) &= h((0,a,0),(\iota(z)\cdot b,0,0)) \\ &= f(0,\iota(z)\cdot b) + a^\sigma \cdot 0 + 0^\sigma \cdot \varepsilon \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $\varphi(p') \perp_\gamma \varphi(p')$.

Ist umgekehrt $x \not\perp p'$, dann ist also $x \in L_p$ und außerdem gilt $h(\varphi(p'), \varphi(x)) = h(\langle(0,1,0)\rangle, \langle(\iota(x),0,1)\rangle)$. Es folgt für alle $a, b \in k^*$:

$$\begin{aligned} h((0,1,0)\cdot a, (\iota(x),0,1)\cdot b) &= h((0,a,0),(\iota(x)\cdot b,0,b)) \\ &= f(0,\iota(x)\cdot b) + a^\sigma \cdot b + 0^\sigma \cdot \varepsilon \cdot 0 \\ &= a^\sigma \cdot b \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Also ist auch $\varphi(x) \not\perp_\gamma \varphi(p')$.

Damit ist φ ein Isomorphismus. □

Bemerkung 6.26. *Im Beweis zu Lemma 6.25. wurde gerade gezeigt, dass zwei Punkte x und y aus $p^\perp \cup \{p'\}$ kollinear bezüglich $\perp$ sind, genau dann, wenn ihre Bilder $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ kollinear bezüglich $\perp_\gamma$ sind. Daraus folgt, dass $\varphi(p^\perp \cup \{p'\}) = \varphi(p)^{\perp_\gamma} \cup \{\varphi(p')\}$ gilt.*

Fall (*ii*): Nicht jede (σ, ε)-hermitesche Form ist spurwertig

Lemma 6.27. *Sei q eine Form wie in Lemma 6.22.(ii). Dann ist die Abbildung $q' : V_1 \to k$ gegeben durch $q'(x,t,u) = q(x) + t^\sigma \cdot u$ eine nicht ausgeartete pseudo-quadratische Form bezüglich σ und ε.*

Beweis. Da die Form q eine (σ,ε)-quadratische Form ist mit $q : V \to k$, gibt es eine σ-Sesquilinearform $\psi : V \times V \to k$, so dass $q(x) = \psi(x,x) + k_{\sigma,\varepsilon}$. Sei $\psi' : V_1 \times V_1 \to k$ definiert durch $\psi'((x,t,u),(a,b,c)) = \psi(x,a) + t^\sigma \cdot c$. Dann gilt für $(x,t,u), (x',t',u'), (a,b,c), (a',b',c') \in V_1$:

$$\begin{aligned} & \psi'((x,t,u) + (x',t',u'), (a,b,c) + (a',b',c')) \\ = \; & \psi'((x+x', t+t', u+u'), (a+a', b+b', c+c')) \\ = \; & \psi(x+x', a+a') + (t+t')^\sigma \cdot (c+c') \\ = \; & \psi(x,a) + \psi(x,a') + \psi(x',a) + \psi(x',a') + (t^\sigma + t'^\sigma)\cdot(c+c') \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi(x,a)+\psi(x,a')+\psi(x',a)+\psi(x',a')+t^\sigma\cdot c+t^\sigma\cdot c'+t'^\sigma\cdot c+t'^\sigma\cdot c'\\
&= \psi(x,a)+t^\sigma\cdot c+\psi(x,a')+t^\sigma\cdot c'+\psi(x',a)+t'^\sigma\cdot c+\psi(x',a')+t'^\sigma\cdot c'\\
&= \psi'((x,t,u),(a,b,c))+\psi'((x,t,u),(a',b',c'))+\psi'((x',t',u'),(a,b,c))\\
&\quad +\psi'((x',t',u'),(a',b',c'))
\end{aligned}
$$

Also ist ψ' biadditiv und außerdem gilt für $\alpha,\beta\in k$:

$$
\begin{aligned}
\psi'((x,t,u)\cdot\alpha,(a,b,c)\cdot\beta) &= \psi'((x\cdot\alpha,t\cdot\alpha,u\cdot\alpha),(a\cdot\beta,b\cdot\beta,c\cdot\beta))\\
&= \psi(x\cdot\alpha,a\cdot\beta)+(t\cdot\alpha)^\sigma\cdot(c\cdot\beta)\\
&= \alpha^\sigma\cdot\psi(x,a)\cdot\beta+\alpha^\sigma\cdot t^\sigma\cdot c\cdot\beta\\
&= \alpha^\sigma\cdot(\psi(x,a)+t^\sigma\cdot c)\cdot\beta\\
&= \alpha^\sigma\cdot(\psi'((x,t,u),(a,b,c))\cdot\beta
\end{aligned}
$$

Also ist ψ' eine σ-Sesquilinearform und weiter gilt:

$$
\begin{aligned}
q'(x,t,u) &= q(x)+t^\sigma\cdot u\\
&= \psi(x,x)+t^\sigma\cdot u+k_{\sigma,\varepsilon}\\
&= \psi'((x,t,u),(x,t,u))+k_{\sigma,\varepsilon}
\end{aligned}
$$

Damit ist q' also eine (σ,ε)-quadratische Form.
Es bleibt zu zeigen, dass q' nicht ausgeartet ist, also dass der Unterraum $V_1^{\perp_{\beta(q')}}\cap q'^{-1}([0]_{\sigma,\varepsilon})=\{0\}$ ist.
Die zu q' gehörige Sesquilinearform $\phi': V_1\times V_1\to k$ ist nach Bemerkung 5.34. gegeben durch $\phi'(x,y)=\psi'(x,y)+\psi'(y,x)^\sigma\cdot\varepsilon$.
Sei nun $a\neq 0$ mit $a=(a_1,a_2,a_3)\in q'^{-1}([0]_{\sigma,\varepsilon})$, also $q'(a)=[0]_{\sigma,\varepsilon}$.

- Ist $\phi'(a,a)\neq 0$, dann sind wir fertig.
- Sei also $\phi'(a,a)=0$.
  - Sei zunächst $q(a_1)=[0]_{\sigma,\varepsilon}$ und ϕ die zu q gehörige Sesquilinearform. Dann gibt es $b_1\in V$ mit $\phi(a_1,b_1)\neq 0$, denn q ist nicht ausgeartet. Sei $b:=(b_1,0,0)\in V_1$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\phi'(a,b) &= \psi'(a,b)+\psi'(b,a)^\sigma\cdot\varepsilon\\
&= \psi'(a,b)+\psi'(b,a)^\sigma\cdot\varepsilon\\
&= \psi(a_1,b_1)+a_2^\sigma\cdot 0+(\psi(b_1,a_1)+0^\sigma\cdot a_3)^\sigma\cdot\varepsilon\\
&= \psi(a_1,b_1)+\psi(b_1,a_1)^\sigma\cdot\varepsilon\\
&= \phi(a_1,b_1)\\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

also $a\notin V_1^{\perp_{\beta(q')}}$.

– Ist aber $q(a_1) \neq [0]_{\sigma,\varepsilon}$, dann gilt wegen $q(a_1) = \psi(a_1, a_1) + k_{\sigma,\varepsilon}$, dass $\psi(a_1, a_1) \notin k_{\sigma,\varepsilon}$ und damit $\psi(a_1, a_1) \neq 0$. Ist $a_2 = 0$, dann ist

$$\begin{aligned} q'(a) &= \psi'(a, a) + k_{\sigma,\varepsilon} \\ &= \psi(a_1, a_1) + a_2^\sigma \cdot a_3 + k_{\sigma,\varepsilon} \\ &= \psi(a_1, a_1) + k_{\sigma,\varepsilon} \\ &= q(a_1) \\ &\neq [0]_{\sigma,\varepsilon} \end{aligned}$$

aber das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, also ist $a_2 \neq 0$. Setze $b = (a_1, 0, (-a_2^{-1})^\sigma \cdot \psi(a_1, a_1))$. Dann ist

$$\begin{aligned} \phi'(b, a) &= \psi'(b, a) + \psi'(a, b)^\sigma \cdot \varepsilon \\ &= \psi'((a_1, 0, (-a_2^{-1})^\sigma \cdot \psi(a_1, a_1)), (a_1, a_2, a_3)) \\ &\quad + \psi'((a_1, a_2, a_3), (a_1, 0, (-a_2^{-1})^\sigma \cdot \psi(a_1, a_1)))^\sigma \cdot \varepsilon \\ &= \psi(a_1, a_1) + 0 + (\psi(a_1, a_1) \\ &\quad + a_2^\sigma \cdot (-a_2^{-1})^\sigma \cdot \psi(a_1, a_1))^\sigma \cdot \varepsilon \\ &= \psi(a_1, a_1) + (\psi(a_1, a_1) - \psi(a_1, a_1))^\sigma \cdot \varepsilon \\ &= \psi(a_1, a_1) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Also ist $a \notin V_1^{\perp_{\beta(q')}}$.

Dann ist also $V^{\perp_{\beta(q)}} \cap q^{-1}([0]_{\sigma,\varepsilon}) = \{0\}$ und damit q' nicht ausgeartet. □

Analog zu Theorem 5.45. definiert q' dann einen Polarraum S_1 auf P_1 . Die Kollinearitätsrelation von S_1 wird im Folgenden mit $\perp_{q'}$ bezeichnet. Sei γ' die Polarität, die durch $\perp_{q'}$ induziert wird. Dann ist (P_1, γ', i_{S_1}) mit $i_{S_1} : S_1 \to P_1$ als Inklusionsabbildung eine Einbettung von S_1.

Wie in Fall (i) definiere eine Abbildung $\varphi : p^\perp \cup \{p'\} \to S_1$ durch:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \langle(\iota(x), 0, 1)\rangle , & \text{falls } x \in L_p \\ \langle(\iota(y), 0, 0)\rangle , & \text{falls } x \in S_\infty \text{ und } x = \langle p, y\rangle_\infty , \text{ wobei } y \in L_p \backslash \{p\} \\ \langle(0, 1, 0)\rangle , & \text{falls } x = p' \end{cases}$$

Lemma 6.28. *Die Abbildung $\varphi : p^\perp \cup \{p'\} \to \varphi(p^\perp \cup \{p'\})$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Es ist klar, dass φ surjektiv ist. Der Beweis, dass φ injektiv ist, ist derselbe wie in Fall (i). Also ist φ bijektiv.

Zeige als nächstes, dass zwei Punkte x und y in $p^\perp \cup \{p'\}$ kollinear sind bezüglich $\perp$, genau dann, wenn ihre Bilder $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ kollinear sind bezüglich $\perp_{q'}$.

- Seien $x, y \in L_p$.
  Sei zunächst $x \perp y$. Dann folgt mit Definition 5.1.*(i)*, dass $\langle x, y\rangle \subseteq p^\perp$ gilt. Weil $\iota_*(Cone(p))$ der Polarraum assoziiert zu q ist, folgt für alle $s \in \langle x, y\rangle$, dass $q(\iota(\langle p, s\rangle)) = \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}$ und damit $q(\iota(\langle x, y\rangle)) = \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
q'(\langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle) &= q'(\langle\langle(\iota(x), 0, 1)\rangle, \langle(\iota(y), 0, 1)\rangle\rangle) \\
&= q'(\langle(\iota(x), 0, 1), (\iota(y), 0, 1)\rangle) \\
&= \{q'((\iota(x), 0, 1) \cdot a + (\iota(y), 0, 1) \cdot b) : a, b \in k\} \\
&= \{q'((\iota(x) \cdot a + \iota(y) \cdot b, 0, a + b)) : a, b \in k\} \\
&= \{q(\iota(x) \cdot a + \iota(y) \cdot b) + 0^\sigma \cdot (a + b) : a, b \in k\} \\
&= \{q(\iota(x \cdot a + y \cdot b)) : a, b \in k\} \\
&= q(\iota(\langle x, y\rangle)) \\
&= \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}
\end{aligned}$$

  Also folgt, dass $\varphi(x) \perp_{q'} \varphi(y)$ gilt.
  Umgekehrt sei nun $\varphi(x) \perp_{q'} \varphi(y)$. Es ist $q(\iota(x) \cdot a) = [0]_{\sigma,\varepsilon}$, weil $x \perp p$ und $\iota_*(Cone(p))$ der Polarraum assoziiert zu q ist und genauso gilt $q(\iota(y) \cdot b) = [0]_{\sigma,\varepsilon}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\{[0]_{\sigma,\varepsilon}\} &= q'(\langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle) \\
&= q'(\langle\langle(\iota(x), 0, 1)\rangle, \langle(\iota(y), 0, 1)\rangle\rangle) \\
&= q'(\langle(\iota(x), 0, 1), (\iota(y), 0, 1)\rangle) \\
&= \{q'((\iota(x), 0, 1) \cdot a + (\iota(y), 0, 1) \cdot b) : a, b \in k\} \\
&= \{q'((\iota(x) \cdot a + \iota(y) \cdot b, 0, a + b)) : a, b \in k\} \\
&= \{q(\iota(x) \cdot a + \iota(y) \cdot b) + 0^\sigma \cdot (a + b) : a, b \in k\} \\
&= \{q(\iota(x) \cdot a) + q(\iota(y) \cdot b) \\
&\quad +(f(\iota(x \cdot a), \iota(y \cdot b)) + k_{\sigma,\varepsilon}) : a, b \in k\} \\
&= \{[0]_{\sigma,\varepsilon} + g(x \cdot a, y \cdot b) + k_{\sigma,\varepsilon} : a, b \in k\} \\
&= \{a^\sigma \cdot g(x, y) \cdot b + k_{\sigma,\varepsilon} : a, b \in k\}
\end{aligned}$$

  Also folgt, dass $a^\sigma \cdot g(x, y) \cdot b \in k_{\sigma,\varepsilon}$ für alle $a, b \in k$. Angenommen $g(x, y) \neq 0$. Dann ist also auch $a^\sigma \cdot g(x, y) \cdot g(x, y)^{-1} = a^\sigma \in k_{\sigma,\varepsilon}$ für alle $a \in k$ und damit $k \subseteq k_{\sigma,\varepsilon}$, was ein Widerspruch ist. Also ist $g(x, y) = 0$ und damit sind x und y kollinear.

- Seien $x, y \in S_\infty$ mit $x = \langle p, z\rangle_\infty$ bzw. $y = \langle p, s\rangle_\infty$ für $z, s \in L_p$.
  Sei zunächst $x \perp y$. Da $z, s \in L_p$, folgt mit Definition 5.1.*(i)*, dass $\langle z, s\rangle \subseteq p^\perp$ gilt. Weil $\iota_*(Cone(p))$ der Polarraum assoziiert zu q ist, folgt zunächst $q(\iota(\langle p, r\rangle)) = \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}$ für alle $r \in \langle z, s\rangle$ und schließlich $q(\iota(\langle z, s\rangle)) = \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
q'(\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle) &= q'(\langle\langle(\iota(z), 0, 0)\rangle, \langle(\iota(s), 0, 0)\rangle\rangle) \\
&= q'(\langle(\iota(z), 0, 0), (\iota(s), 0, 0)\rangle) \\
&= \{q'((\iota(z), 0, 0) \cdot a + (\iota(s), 0, 0) \cdot b) : a, b \in k\} \\
&= \{q'((\iota(z) \cdot a + \iota(s) \cdot b, 0, 0)) : a, b \in k\} \\
&= \{q((\iota(z) \cdot a + \iota(s) \cdot b) + 0^\sigma \cdot 0 : a, b \in k\} \\
&= \{q((\iota(z \cdot a) + \iota(s \cdot b)) : a, b \in k\} \\
&= \{q((\iota(z \cdot a + s \cdot b)) : a, b \in k\} \\
&= q((\iota \langle z, s\rangle) \\
&= \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}
\end{aligned}$$

  Also folgt, dass $\varphi(x) \perp_{q'} \varphi(y)$ gilt.
  Umgekehrt sei nun $\varphi(x) \perp_{q'} \varphi(y)$. Dann ist also:

$$\begin{aligned}
\{[0]_{\sigma,\varepsilon}\} &= q'(\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle) \\
&= q'(\langle\langle(\iota(z), 0, 0)\rangle, \langle(\iota(s), 0, 0)\rangle\rangle) \\
&= q'(\langle(\iota(z), 0, 0), (\iota(s), 0, 0)\rangle) \\
&= q'(\{(\iota(z), 0, 0) \cdot a + (\iota(s), 0, 0) \cdot b : a, b \in k\}) \\
&= q'(\{(\iota(z) \cdot a + \iota(s) \cdot b, 0, 0) : a, b \in k\}) \\
&= \{q(\iota(z) \cdot a + \iota(s) \cdot b) + 0^\sigma \cdot 0 : a, b \in k\} \\
&= \{q(\iota(z) \cdot a) + q(\iota(s) \cdot b) \\
&\quad + (f(\iota(z \cdot a), \iota(s \cdot b)) + k_{\sigma,\varepsilon}) : a, b \in k\} \\
&= \{[0]_{\sigma,\varepsilon} + g(z \cdot a, s \cdot b) + k_{\sigma,\varepsilon} : a, b \in k\} \\
&= \{a^\sigma \cdot g(z, s) \cdot b + k_{\sigma,\varepsilon} : a, b \in k\}
\end{aligned}$$

  Also folgt, dass $a^\sigma \cdot g(z, s) \cdot b \in k_{\sigma,\varepsilon}$ für alle $a, b \in k$. Angenommen $g(z, s) \neq 0$. Dann ist also auch $a^\sigma \cdot g(z, s) \cdot g(z, s)^{-1} = a^\sigma \in k_{\sigma,\varepsilon}$ für alle $a \in k$ und damit $k \subseteq k_{\sigma,\varepsilon}$, was ein Widerspruch ist. Also ist $g(z, s) = 0$. Dann sind z und s kollinear und damit auch $x \perp y$.

- Seien $x \in L_p$ und $y \in S_\infty$ mit $y = \langle p, s\rangle_\infty$ für $s \in L_p$.
  Sei zunächst $x \perp y$. Da $x, s \in L_p$, folgt mit Definition 5.1.*(i)*, dass $\langle x, s\rangle \subseteq p^\perp$ gilt, und, weil $\iota_*(Cone(p))$ der Polarraum assoziiert zu

q ist, folgt dann $q(\iota(\langle x, s\rangle)) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
q'(\langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle) &= q'(\langle(\iota(x), 0, 1), (\iota(s), 0, 0)\rangle) \\
&= \{q'((\iota(x), 0, 1) \cdot a + (\iota(s), 0, 0) \cdot b) : a, b \in k\} \\
&= \{q'((\iota(x) \cdot a, 0, a) + (\iota(s) \cdot b, 0, 0)) : a, b \in k\} \\
&= \{q'((\iota(x) \cdot a + \iota(s) \cdot b, 0, a)) : a, b \in k\} \\
&= \{q(\iota(x) \cdot a + \iota(s) \cdot b) + 0^\sigma \cdot a : a, b \in k\} \\
&= \{q((\iota(x \cdot a + s \cdot b)) : a, b \in k\} \\
&= q((\iota \langle x, s\rangle) \\
&= \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}
\end{aligned}$$

Also folgt $\varphi(x) \perp_{q'} \varphi(y)$.
Umgekehrt sei nun $\varphi(x) \perp_{q'} \varphi(y)$. Dann ist also:

$$\begin{aligned}
\{[0]_{\sigma,\varepsilon}\} &= q'(\langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle) \\
&= q'(\langle(\iota(x), 0, 1), (\iota(s), 0, 0)\rangle) \\
&= q'(\{(\iota(x), 0, 1) \cdot a + (\iota(s), 0, 0) \cdot b : a, b \in k\}) \\
&= q'(\{(\iota(x) \cdot a + \iota(s) \cdot b, 0, a) : a, b \in k\}) \\
&= \{q(\iota(x) \cdot a + \iota(s) \cdot b) + 0^\sigma \cdot a : a, b \in k\}) \\
&= \{q(\iota(x) \cdot a) + q(\iota(s) \cdot b) \\
&\quad +(f(\iota(x \cdot a), \iota(s \cdot b)) + k_{\sigma,\varepsilon}) : a, b \in k\}) \\
&= \{\{[0]_{\sigma,\varepsilon}\} + g(x \cdot a, s \cdot b) + k_{\sigma,\varepsilon} : a, b \in k\}) \\
&= \{a^\sigma \cdot g(x, s) \cdot b + k_{\sigma,\varepsilon} : a, b \in k\})
\end{aligned}$$

Also folgt, dass $a^\sigma \cdot g(x, s) \cdot b \in k_{\sigma,\varepsilon}$ für alle $a, b \in k$. Angenommen $g(x, s) \neq 0$. Dann ist also auch $a^\sigma \cdot g(x, s) \cdot g(x, s)^{-1} = a^\sigma \in k_{\sigma,\varepsilon}$ für alle $a \in k$ und damit $k \subseteq k_{\sigma,\varepsilon}$, was ein Widerspruch ist. Also ist $g(x, s) = 0$ und damit sind x und s kollinear und daher auch $x \perp y$.

- Sei nun $x \perp p'$ für ein $x \in p^\perp \cup \{p'\}$. Dann ist also $x = p'$ oder $x \in S_\infty$.

  1. Ist $x = p'$, dann ist

$$\begin{aligned}
q'(\langle\varphi(p'), \varphi(p')\rangle) &= q'(\langle(0, 1, 0)\rangle) \\
&= \{q'((0, 1, 0) \cdot a) : a \in k\} \\
&= \{q'((0, 1, 0) \cdot a) : a \in k\} \\
&= \{q(0) + a^\sigma \cdot 0 : a \in k\} \\
&= \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}
\end{aligned}$$

  und damit $\varphi(p') \perp_{q'} \varphi(p')$.

2. Ist $x \in S_\infty$, wobei $x = \langle p, z\rangle_\infty$ mit $z \in L_p \backslash \{p\}$, dann ist $q(\iota(\langle p, z\rangle)) = \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}$, denn $\iota_*(Cone(p))$ ist der Polarraum assoziiert zu q. Dann ist

$$\begin{aligned}
q'(\langle\varphi(x), \varphi(p')\rangle) &= q'(\langle(\iota(z), 0, 0), (0, 1, 0)\rangle) \\
&= \{q'((\iota(z), 0, 0) \cdot a + (0, 1, 0) \cdot b) : a, b \in k\} \\
&= \{q'((\iota(z) \cdot a, b, 0)) : a, b \in k\} \\
&= \{q(\iota(z) \cdot a) + b^\sigma \cdot 0 : a, b \in k\} \\
&= \{q(\iota(z) \cdot a) : a, b \in k\} \\
&= \{q(\iota(z \cdot a)) : a, b \in k\} \\
&= q(\iota(\langle p, z\rangle)) \\
&= \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}
\end{aligned}$$

Also folgt $\varphi(x) \perp_{q'} \varphi(p')$.

Sei nun umgekehrt $x \not\perp p'$, also $x \in L_p$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
q'(\langle\varphi(x), \varphi(p')\rangle) &= q'(\langle(\iota(x), 0, 1), (0, 1, 0)\rangle) \\
&= q'(\{\iota(x), 0, 1) \cdot a + (0, 1, 0) \cdot b : a, b \in k\}) \\
&= q'(\{\iota(x) \cdot a, b, a) : a, b \in k\}) \\
&= \{q(\iota(x) \cdot a) + b^\sigma \cdot a : a, b \in k\} \\
&= \{[b^\sigma \cdot a]_{\sigma,\varepsilon} : a, b \in k\}
\end{aligned}$$

Sei $c \notin k_{\sigma,\varepsilon}$, setze $b = 1$ und $a = c$. Dann ist $b^\sigma \cdot a = 1^\sigma \cdot c = c \notin k_{\sigma,\varepsilon}$ und damit $q'(\langle\varphi(x), \varphi(p')\rangle) = \{[b^\sigma \cdot a]_{\sigma,\varepsilon} : a, b \in k\} \neq \{[0]_{\sigma,\varepsilon}\}$. Es folgt also, dass $\varphi(x) \not\perp_{q'} \varphi(p')$.

Damit induziert φ eine Bijektion von $L_{(p^\perp \cup \{p'\})}$ nach $L_{(\varphi(p^\perp \cup \{p'\}))}$, also ist φ ein Isomorphismus. $\square$

Bemerkung 6.29. *Im Beweis zu Lemma 6.28. wurde gerade gezeigt, dass zwei Punkte x und y aus $p^\perp \cup \{p'\}$ kollinear bezüglich $\perp$ sind, genau dann, wenn ihre Bilder $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ kollinear bezüglich $\perp_{q'}$ sind. Daraus folgt, dass $\varphi(p^\perp \cup \{p'\}) = \varphi(p)^{\perp_{q'}} \cup \{\varphi(p')\}$ gilt.*

Nach Theorem 6.8. lässt sich in jedem der beiden Fälle der Isomorphismus $\varphi : p^\perp \cup \{p'\} \to \varphi(p)^{\perp_\gamma} \cup \{\varphi(p')\}$ bzw. $\varphi : p^\perp \cup \{p'\} \to \varphi(p)^{\perp_{q'}} \cup \{\varphi(p')\}$ eindeutig zu einem Isomorphismus von S nach S_1 fortsetzen. Da S_1 einbettbar ist, lässt sich also auch S in einen projektiven Raum einbetten. Damit ist der Einbettungssatz 6.10. bewiesen. $\square$

Eine schöne Folgerung aus dem Einbettungssatz und den beiden Theoremen 5.29. und 5.45. ist, dass die Polarräume vom Rang ≥ 3, deren maximale singuläre Unterräume desarguesch sind, den Vektorräumen mit einer nicht ausgearteten hermiteschen oder pseudoquadratischen Form entsprechen.

A Anhang

A.1 Rechnung

Rechnung zum Beweis von Lemma 5.24.:

$$
\begin{aligned}
& f(x,y) \\
= \ & f(\sum_{i\in I} e_i \cdot x_i, \sum_{j\in I} e_j \cdot y_j) \\
= \ & \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} f(e_i \cdot x_i, e_j \cdot y_j) \\
= \ & \sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ i<j}} (f(e_i \cdot x_i, e_j \cdot y_j)) + f(e_i \cdot x_i, e_i \cdot y_i) + \sum_{\substack{j\in I\\ i>j}} (f(e_i \cdot x_i, e_j \cdot y_j))\right) \\
= \ & \sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ i<j}} (x_i^\sigma \cdot f(e_i, e_j) \cdot y_j) + x_i^\sigma \cdot f(e_i, e_i) \cdot y_i + \sum_{\substack{j\in I\\ i>j}} (f(e_j \cdot y_j, e_i \cdot x_i)^\sigma \cdot \varepsilon)\right) \\
= \ & \sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ i<j}} (x_i^\sigma \cdot g(e_i, e_j) \cdot y_j) + x_i^\sigma \cdot (g_i + g_i^\sigma \cdot \varepsilon) \cdot y_i + \sum_{\substack{j\in I\\ i>j}} \big((y_j^\sigma \cdot f(e_j, e_i) \cdot x_i)^\sigma \cdot \varepsilon\big)\right) \\
= \ & \sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}} (x_i^\sigma \cdot g(e_i, e_j) \cdot y_j) + (x_i^\sigma \cdot g_i \cdot y_i + x_i^\sigma g_i^\sigma \cdot \varepsilon \cdot y_i)\right. \\
& \left. + \sum_{\substack{j\in I\\ i>j}} \big((y_j^\sigma \cdot g(e_j, e_i) \cdot x_i)^\sigma \cdot \varepsilon\big)\right) \\
= \ & \sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}} (g(e_i \cdot x_i, e_j \cdot y_j)) + (x_i^\sigma \cdot g_i \cdot y_i + x_i^\sigma g_i^\sigma \cdot \varepsilon \cdot y_i \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon)\right. \\
& \left. + \sum_{\substack{j\in I\\ i>j}} (g(e_j \cdot y_j, e_i \cdot x_i)^\sigma \cdot \varepsilon)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}}(g(e_i\cdot x_i, e_j\cdot y_j)) + (x_i^\sigma\cdot g_i\cdot y_i + x_i^\sigma g_i^\sigma\cdot y_i^{\sigma^2}\cdot\varepsilon)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}}(g(e_j\cdot y_j, e_i\cdot x_i)^\sigma\cdot\varepsilon)\right)\\
&= \sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}}(g(e_i\cdot x_i, e_j\cdot y_j) + g(e_j\cdot y_j, e_i\cdot x_i)^\sigma\cdot\varepsilon)\right.\\
&\quad + (x_i^\sigma\cdot g_i\cdot y_i + (y_i^\sigma\cdot g_i\cdot x_i)^\sigma\cdot\varepsilon))\\
&= \sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}}(g(e_i\cdot x_i, e_j\cdot y_j) + g(e_j\cdot y_j, e_i\cdot x_i)^\sigma\cdot\varepsilon)\right.\\
&\quad +(x_i^\sigma\cdot g(e_i,e_i)\cdot y_i + (y_i^\sigma\cdot g(e_i,e_i)\cdot x_i)^\sigma\cdot\varepsilon))\\
&= \sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}}(g(e_i\cdot x_i, e_j\cdot y_j) + g(e_j\cdot y_j, e_i\cdot x_i)^\sigma\cdot\varepsilon) + (g(e_i\cdot x_i, e_i\cdot y_i)\right.\\
&\quad +g(e_i\cdot y_i, e_i\cdot x_i)^\sigma\cdot\varepsilon))\\
&= \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}(g(e_i\cdot x_i, e_j\cdot y_j) + g(e_j\cdot y_j, e_i\cdot x_i)^\sigma\cdot\varepsilon)\\
&= g(\sum_{i\in I}e_i\cdot x_i, \sum_{j\in I}e_j\cdot y_j) + g(\sum_{j\in I}e_j\cdot y_j, \sum_{i\in I}e_i\cdot x_i)^\sigma\cdot\varepsilon\\
&= g(x,y) + g(y,x)^\sigma\cdot\varepsilon
\end{aligned}
$$

A.2 Rechnung

Rechnung zum Beweis von Lemma 5.31.:

$$\begin{aligned}
& q(x) \\
= \ & q(\sum_{i\in I} e_i \cdot x_i) \\
= \ & f(\sum_{i\in I} e_i \cdot x_i, \sum_{i\in I} e_i \cdot x_i) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \ & \sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ i<j}} (f(e_i \cdot x_i, e_j \cdot x_j)) + f(e_i \cdot x_i, e_i \cdot x_i) + \sum_{\substack{j\in I\\ i>j}} (f(e_i \cdot x_i, e_j \cdot x_j))\right) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \ & \sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ i<j}} (x_i^\sigma f(e_i, e_j) \cdot x_j) + x_i^\sigma f(e_i, e_i) \cdot x_i + \sum_{\substack{j\in I\\ i>j}} (f(e_j \cdot x_j, e_i \cdot x_i))\right) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \ & \sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ i<j}} (x_i^\sigma \cdot g(e_i, e_j) \cdot x_j) + x_i^\sigma \cdot g_i \cdot x_i + \sum_{\substack{j\in I\\ i>j}} \left(x_j^\sigma \cdot f(e_j, e_i) \cdot x_i\right)\right) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \ & \sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ i<j}} (x_i^\sigma \cdot g(e_i, e_j) \cdot x_j) + x_i^\sigma \cdot g(e_i, e_i) \cdot x_i + \sum_{\substack{j\in I\\ i>j}} \left(x_j^\sigma \cdot g(e_j, e_i) \cdot x_i\right)\right) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \ & \sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ i\leq j}} x_i^\sigma \cdot g(e_i, e_j) \cdot x_j + \sum_{\substack{j\in I\\ i>j}} g(e_j \cdot x_j, e_i \cdot x_i)\right) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \ & \sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ i\leq j}} (g(e_i \cdot x_i, e_j \cdot x_j)) + \sum_{\substack{j\in I\\ i>j}} (g(e_j \cdot x_j, e_i \cdot x_i))\right) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \ & \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} g(e_i \cdot x_i, e_j \cdot x_j) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \ & g(\sum_{i\in I} e_i \cdot x_i, \sum_{j\in I} e_j \cdot x_j) + k_{\sigma,\varepsilon} \\
= \ & g(x, x) + k_{\sigma,\varepsilon}
\end{aligned}$$

Literatur

[1] Emil Artin, Geometric Algebra, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Number 3, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957

[2] Francis Buekenhout and Ernest Shult, On the foundation of polar geometry, Geometriae Dedicata 3: 155-170, 1974

[3] Francis Buekenhout, On the foundation of polar geometry II, Geometriae Dedicata 33: 21-26, 1990

[4] Francis Buekenhout (ed.), Handbook of Incidence Geometry, Elsevier, Amsterdam, 1995

[5] Romain Hild, Isomorphismes des géométries classiques

[6] Donald E. Taylor, The Geometry of the Classical Groups, Sigma Series in Pure Mathematics, Volume 9, Heldermann Verlag, 1992

[7] Jacques Tits, Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs, Lecture Notes in Mathematics 386, Springer-Verlag, Berlin, 1974

[8] Ferdinand D. Veldkamp, Polar Geometry I-V, Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, A62 (1959), 512-551 und A63, 207-212 (= Indag. Math 21 und 22)