Mathias Lederer

Übung Algebraische Geometrie II – Blatt 10

Aufgabe 1. Sei T ein lokaler Ring.

(a) Sei $x \in \operatorname{Spec} T$ der abgeschlossene Punkt und $U \subset \operatorname{Spec} T$ eine offene Umgebung von x. Zeige: Dann ist $U = \operatorname{Spec} T$.

(b) Sei $\alpha : T^{n+1} \to T$ ein T-Modulhomomorphismus, $\alpha_i = \alpha(e_i)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) α ist surjektiv;
(ii) $\exists i$ so, dass $\alpha_i \in T^*$;
(iii) die Sequenz $0 \to K \to T^{n+1} \to T \to 0$ zum gegebenen α ist split exakt, also $K = \ker \alpha$ ein direkter Summand vom Rang n in T^{n+1}.

Aufgabe 2. Sei T ein Ring und M ein T-Modul. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} T$ maximal ist $M_\mathfrak{m}$ ein freier $T_\mathfrak{m}$-Modul vom Rang m;
(ii) $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} T$ ist $M_\mathfrak{p}$ ein freier $T_\mathfrak{m}$-Modul vom Rang m;
(iii) $\exists f_1, \ldots, f_t \in B$ so, dass $(f_1, \ldots, f_t) = B$ und $M[f_i^{-1}]$ ein freier $B[f_i^{-1}]$-Modul vom Rang m ist.

Aufgabe 3. Zeige: Ein lokal direkter Summand eines endlich erzeugten freien Moduls über einem beliebigen Ring ist ein direkter Summand.