

## Übung Algebraische Geometrie II – Blatt 9

**Aufgabe 1.** Sei  $X = \text{Spec } A$  ein affines Schema und  $V \subset X$  offen und quasikompakt. Sei  $\mathcal{F}$  ein  $\mathcal{O}_X|_V$ -Modul. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- (i) Die Garbe  $\mathcal{F}$  ist quasikohärent.
- (ii) Es gibt eine endliche Überdeckung durch ausgezeichnete offene  $V_i = X_{f_i} = \text{Spec } A_{f_i} \subset V$  und für alle  $i$  einen  $A_{f_i}$ -Modul  $M_i$  derart, dass  $\mathcal{F}|_{V_i} = \widetilde{M}_i$ .
- (iii) Es gibt einen  $A$ -Modul  $M$  derart, dass  $\mathcal{F} = \widetilde{M}|_V$ .
- (iv) Folgende zwei Bedingungen sind erfüllt: Für alle  $f \in A$  derart, dass  $X_{f_i} \subset V$  und für alle  $s \in \Gamma(X_f, \mathcal{F})$  existiert ein  $n \geq 0$  derart, dass sich  $f^n s$  zu einem Element von  $\Gamma(V, \mathcal{F})$  fortsetzt. Und für alle  $f \in A$  derart dass  $X_{f_i} \subset V$  und für alle  $t \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ , dessen Restriktion auf  $\Gamma(X_f, \mathcal{F})$  gleich 0 ist, existiert ein  $n \geq 0$  derart, dass  $f^n t = 0$ .

**Aufgabe 2.** Sei  $\phi : S \rightarrow T$  ein Homomorphismus von graduierten Ringen mit Kern  $I$ . Sei  $d > 0$ ,  $f \in S_d$  und  $g = \phi(f)$ .

- (a) Zeige: Falls  $\phi$  surjektiv ist, dann ist auch  $(\phi_f)_0 : (S_f)_0 \rightarrow (T_g)_0$  surjektiv.
- (b) Zeige:  $\ker(\phi_f)_0 = (I_f)_0 = \left\{ \frac{a}{f^e}; a \in I_{de}, e \geq 0 \right\}$ .