3rd European Congress of Mathematics
Poster sessions

Section 02: Algebra. Number Theory — Poster number 402

Initial Minors and Normal Rank. Application to the Algebraic Birkhoff's Interpolation Problem

Francisco Palacios Quiñonero*, Dep. Matemàtica Aplicada III, Universitat Politècnica de Catalunya.
Pere Rubió i Díaz, Dep. Matemàtica Aplicada III, Universitat Politècnica de Catalunya.

ABSTRACT

Denominamos *menor inicial* de orden n de una matriz A a un menor construido empleando las n primeras columnas de A. Los menores iniciales nos permiten definir una variedad restringida de rango que denominamos *rango normal*. El rango normal de una matriz es el mayor orden de sus menores iniciales no nulos, lo representamos por $\operatorname{rn}(A)$. La definición del $\operatorname{rn}(A)$ está estrechamente relacionada con la estructura de las matrices de Vandermonde que aparecen en el *Problema de interpolación algebraica de Birkhoff.* Un punto de interpolación es un par $\pi = (q, a) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), q es el orden de derivación y a la abcisa de π. Para un polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, convenimos $p(\pi) = D^{(q)}p(a)$. Un sistema de n puntos de interpolación es una n-pla $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{K})^n$ formada por puntos π_i distintos. Dado $C = (c_i) \in \mathbb{K}^n$, el par (Π, C) define un problema de interpolación algebraica de Birkhoff, que consiste en determinar un polinomio $p \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K})$ que verifique $p(\pi_i) = c_i$ para $i = 1, \ldots, n$. El sistema Π es *regular* si el problema de interpolación (Π, C) posee solución única para todo $C \in \mathbb{K}^n$, en caso contrario, decimos que Π es *singular.* Tomando la base de $\mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K})$ $G = (g_1, \ldots, g_n)$, $g_i(x) = x^{i-1}/(i-1)!$, y escribiendo $p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$, el problema (Π, C) conduce a un sistema lineal cuya matriz de coeficientes es $G(\Pi) = (v_{ij})_{i,j=1}^{n}$ con $v_{ij} = g_j(\pi_i)$; denominamos a $G(\Pi)$ *matriz de Vandermonde* de Π. Los *anuladores* de Π son polinomios $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ que verifican $p(\pi_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$; el *grado* de Π es el grado mínimo de sus anuladores no triviales, lo representamos por $\operatorname{gra}(\Pi)$. Si Π' es un sistema formado con puntos del sistema Π, decimos que Π' es un *subsistema* de Π. Si convenimos $\operatorname{rn}(\Pi) = \operatorname{rn}[G(\Pi)]$, entonces se verifican las siguientes propiedades: (i) $\operatorname{rn}(\Pi)$ no es ninguno de los órdenes de derivación de Π. (ii) Si Π' es un subsistema de Π, entonces $\det[G(\Pi')]$ es un menor inicial de $G(\Pi)$. (iii) $\operatorname{rn}(\Pi)$ es el cardinal máximo de los subsistemas regulares de Π. (iv) $\operatorname{gra}(\Pi) = \operatorname{rn}(\Pi)$. (v) Π es regular si y sólo si $\operatorname{rn}(\Pi) = \operatorname{card}(\Pi)$.

Keywords: *Vandermonde determinant. Intial minors. Normal Rank. Birkhoff Interpolation.*

Mathematics Subject Classification: *15A15, 41A05, 15A57*

Contact Address: `fpq@bages.eupm.upc.es`