Scriptum der Vorlesung

ANALYSIS 2

Prof. Dr. M. Röckner

Universität Bielefeld

Wintersemester 2004/05

Inhaltsverzeichnis

1 Metrische Räume

Definition 1.1. Sei X Menge, Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_{(+)}$ heißt *Metrik*, falls

(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)\ \forall x,y \in X$,

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)\ \forall x,y,z \in X$, „*Dreiecksungleichung*“.

In diesem Fall heißt (X,d) *metrischer Raum*.

Bemerkung 1.2. $d(x,y) \geq 0\ \forall x,y \in X$.

Beweis. $0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y)$. □

Beispiele 1.3. (i) $X := \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $d(x,y) := |x-y|$.

(ii) (X,d) metrischer Raum. $A \subset X$.
Auf A *induzierte Metrik*: $d_A := d_{\restriction A \times A}$, d.h.

$$d_A(x,y) := d(x,y) \quad \forall x,y \in A.$$

(iii) X beliebige Menge.

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } x = y, \\ 1 & \text{, falls } x \neq y, \end{cases} \quad \text{„\textit{diskrete Metrik}“.}$$

Definition 1.4. Sei V reeller Vektorraum. Abbildung $x \mapsto \|x\|$ von V nach $\mathbb{R}$ heißt *Norm* auf V, falls

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in V$,

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|\ \forall x,y \in V$, „*Dreiecksungleichung*“.

$(V, \|\ \ \|)$ heißt *normierter Raum*.

Satz 1.5. *$(V, \| \ \|)$ normierter Raum $\Rightarrow d(x,y) := \|x-y\| \ \forall x, y \in V$ definiert Metrik auf V.*

Beweis. Klar! $\boxed{\text{Ü}}$ □

Beispiele 1.6. (i) $V := \mathbb{R}^n$ mit 2-Norm $\| \ \|_2$, d.h.:

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \text{(auch „\textit{euklidische Norm}“)}.$$

(vgl. Analysis I)
Wenn nichts gesagt, dann auf $\mathbb{R}^n$ diese gemeint und $\| \ \| := \| \ \|_2$.

(ii) $V := \mathbb{R}^n$,

$$|x| := \max_{1 \le i \le n} |x_i|, \quad \text{(„\textit{Maximums-Norm}“)}.$$

Es gilt:

$$|x| \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{$*$}$$

(Klar! $\boxed{\text{Ü}}$)

(iii) X Menge,

$$B(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\},$$

$$\|f\|_X := \sup_{x \in X} |f(x)| \quad \forall f \in B(X).$$

Dann $(B(X), \| \ \|_X)$ normierter Raum.
((i), (ii) klar. (iii):

$$\begin{aligned} \|f+g\|_X &= \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \le \sup_{x \in X} (|f(x)| + |g(x)|) \\ &\le \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| = \|f\|_X + \|g\|_X \ ). \end{aligned}$$

(iv) $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $V := C[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$, $p \ge 1$ und

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \quad \forall f \in C[a,b].$$

Dann: $(C[a,b], \| \ \|_p)$ normierter Raum. (vgl. Analysis I).

Sei im folgenden (X, d) metrischer Raum.

Bezeichnung 1.7. Für $a \in X$ und $r > 0$ heißt

$$B^d(a,r) \underset{(\circledast)}{:=} B(a,r) := \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$$

die *offene Kugel* mit *Mittelpunkt* a und *Radius* r. (($\circledast$) falls d fest. Falls d von Norm $\|\ \|$ kommt, auch $B^{\|\cdot\|}(a,r)$.)

Definition 1.8. $U \subset X$ heißt *Umgebung* von $x \in X$, falls $\exists \varepsilon > 0$ mit

$$B(x,\varepsilon) \subset U.$$

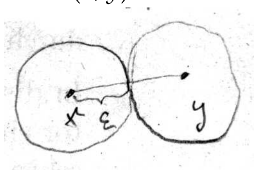
(Insbesondere $B(x,\varepsilon)$ Umgebung von x, genannt ε-*Umgebung* von x.)

Satz 1.9. *$x, y \in X$, $x \neq y$. Dann $\exists$ Umgebung U von x und Umgebung V von y: $U \cap V = \emptyset$.*

Beweis. $U := B(x,\varepsilon)$, $V := B(y,\varepsilon)$ mit $\varepsilon := \frac{1}{2}d(x,y)$. Dann $\forall z \in U$:

$$2\varepsilon = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + d(z,y),$$

also $d(z,y) > \varepsilon$. Somit $z \notin V$.



□

Definition 1.10. $U \subset X$ heißt *offen*, falls U Umgebung jedes ihrer Punkte ist (d.h.: $\forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0 :\ B(x,\varepsilon) \subset U$).

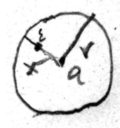
Beispiele 1.11. (i) $X := \mathbb{R}$. Dann $B(a,\varepsilon) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann:
$]a,b[$ offen ($x \in]a,b[\Rightarrow B(a,\varepsilon) \subset]a,b[$, falls $\varepsilon := \min(x-a, b-x)$)
$]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$ offen ($\boxed{\text{Ü}}$).
$[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ nicht offen (klar!).

(ii) (X,d) metrischer Raum, $a \in X$, $r > 0$. Dann $B(a,r)$ offen.

Beweis. $x \in B(x,r)$. Dann für $\varepsilon := r - d(x,a)$.

$$\begin{aligned} y \in B(x,\varepsilon) \ \Rightarrow\ & d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) \\ & \qquad < \varepsilon + d(x,a) = r \\ \Rightarrow\ & y \in B(a,r), \end{aligned}$$

d.h.: $B(x,\varepsilon) \subset B(a,r)$.



$\square$

Bemerkung 1.12. *$(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$ und $(\mathbb{R}^n, | \ |)$ haben dieselben offenen Mengen, d.h.: offen bzgl. Maximums Norm = offen bzgl. euklidischer Norm.*

Beweis. Es gilt

$$B^{| \ |}\left(a, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \subset B^{\| \ \|_2}(a,\varepsilon) \subset B^{| \ |}(a,\varepsilon)$$

(wegen 1.6 (ii) Ungleichung $(*)$). $\square$

Satz 1.13. *(i) $\emptyset$, X offen.*

(ii) U, V offen $\Rightarrow U \cap V$ offen.

(iii) U_i, $i \in I$, (I ist beliebige Indexmenge!), offen $\Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ offen.

Beweis. (i): X offen: Klar!
$\emptyset$ offen: Klar, da kein $x \in \emptyset$ existiert.

(ii): $x \in U \cap V$: Dann $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ mit

$$B(x,\varepsilon_1) \subset U, \quad B(x,\varepsilon_2) \subset V.$$

$\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Dann

$$B(x,\varepsilon) \subset B(x,\varepsilon_1) \subset U,$$
$$B(x,\varepsilon) \subset B(x,\varepsilon_2) \subset V$$

also $B(x,\varepsilon) \subset U \cap V$.

(iii): $x \in \bigcup\limits_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i_0 \in I$: $x \in U_{i_0} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: $B(x,\varepsilon) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

$\square$

Bemerkung 1.14. *$U_1, \ldots, U_n$ offen $\Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ offen. (Klar wegen 1.13 (ii) und Induktion.)*
Aber für unendlich viele falsch:

Beispiel. $U_n :=]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$, $n \in \mathbb{N}$. Dann U_n offen $\forall n$, aber $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$ **nicht** offen.

Definition 1.15. $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls $A^{\mathcal{C}}$ $(:= X \setminus A)$ offen.

Bemerkung 1.16. *Aus 1.13 folgt:*

(i) $\emptyset$, X *abg. (Also:* $\emptyset$, X *offen* ***und*** *abg.)*

(ii) A, B *abg.* $\Rightarrow A \cup B$ *abg.*

(iii) A_i, $i \in I$, *abg.* $\Rightarrow \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ *abg.*

Beispiele 1.17. (i) Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, dann $[a, b]$ abg., denn: $[a, b]^{\mathcal{C}} =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$.

(ii) $A_1 \subset \mathbb{R}^k$ abg., $A_2 \subset \mathbb{R}^m$ abg. $\Rightarrow A_1 \times A_2 \subset \mathbb{R}^{k+m}$ abg.

Beweis. Es gilt: $(A_1 \times A_2)^{\mathcal{C}} = \mathbb{R}^{k+m} \setminus (A_1 \times A_2) = A_1^{\mathcal{C}} \times \mathbb{R}^m \cup \mathbb{R}^k \times A_2^{\mathcal{C}}$. Sei $(a, b) \in A_1^{\mathcal{C}} \times \mathbb{R}^m$. Dann $\exists \varepsilon > 0$: $B(a, \varepsilon) \subset A_1^{\mathcal{C}}$. Dann: $B((a, b), \varepsilon) \subset A_1^{\mathcal{C}} \times \mathbb{R}^m$ (denn: $\|(x, y) - (a, b)\| < \varepsilon \Rightarrow \|x - a\| < \varepsilon$, also $x \in A_1^{\mathcal{C}}$). Also $A_1^{\mathcal{C}} \times \mathbb{R}^m$ offen.
Analog: $\mathbb{R}^k \times A_2^{\mathcal{C}}$ offen. □

Insbesondere sind also *Quader*

$$Q := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \; \forall 1 \leq i \leq n\},$$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$, $\forall 1 \leq i \leq n$, abg. in $\mathbb{R}^n$. (*Beweis*. Induktion.)

(iii) Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ist $[a, b[\subset \mathbb{R}$ weder offen noch abg.

Definition 1.18. Sei $Y \subset X$, $x \in X$. x heißt *Randpunkt* von Y, falls für **jede** Umgebung U von x gilt:

$$U \cap Y \neq \emptyset \quad \text{und} \quad U \cap Y^{\mathcal{C}} \neq \emptyset.$$

$\partial Y :=$ Menge **aller** Randpunkte von Y = *Rand* von Y.

Beispiele 1.19. (i) $X := \mathbb{R}^n$, $\partial B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| = r\}$, *„Sphäre* um x vom *Radius* r“.

(ii) $X := \mathbb{R}$, $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Satz 1.20. *Sei* $Y \subset X$. *Dann:*

(i) $Y \setminus \partial Y$ *offen.*

(ii) $Y \cup \partial Y$ *abg.*

(iii) ∂Y *abg.*

Beweis. (i): $a \in Y \setminus \partial Y \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: $B(a,\varepsilon) \cap Y^{\mathcal{C}} = \emptyset$. $\forall x \in B(a,\varepsilon)$ ist aber $B(a,\varepsilon)$ Umgebung von x, also $B(a,\varepsilon) \cap \partial Y = \emptyset$, also $B(a,\varepsilon) \subset Y \cap (\partial Y)^{\mathcal{C}} = Y \setminus \partial Y$.

(ii): Es gilt: $\partial Y = \partial(Y^{\mathcal{C}})$ (Klar nach Definition!). Aber dann $(Y \cup \partial Y)^{\mathcal{C}} = (Y \cup \partial(Y^{\mathcal{C}}))^{\mathcal{C}} = Y^{\mathcal{C}} \cap (\partial(Y^{\mathcal{C}}))^{\mathcal{C}} = Y^{\mathcal{C}} \setminus \partial(Y^{\mathcal{C}})$ offen nach (i).

(iii): $\partial Y = (Y \cup \partial Y) \setminus (Y \setminus \partial Y) = (\underbrace{Y \cup \partial Y}_{\text{abg. nach (ii)}}) \cap (\underbrace{Y \setminus \partial Y}_{\text{offen nach (i)}})^{\mathcal{C}}$ abg.

□

Bezeichnung 1.21. $Y \subset X$. Dann:

$$\mathring{Y} := Y \setminus \partial Y \quad \textit{Inneres} \text{ oder } \textit{offener Kern} \text{ von } Y,$$

$$\overline{Y} := Y \cup \partial Y \quad \textit{abgeschlossene Hülle} \text{ von } Y.$$

Topologische Räume

Definition 1.22. Sei X Menge. $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *Topologie* auf X, falls:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(ii) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$.

(iii) $U_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$ (I beliebige Indexmenge) $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Dann: $(X, \mathcal{T})$ *topologischer Raum*, und $U \subset X$ heißt *offen*, falls $U \in \mathcal{T}$, und $A \subset X$ heißt *abgeschlossen* falls $A^{\mathcal{C}}$ offen, d.h.: $A^{\mathcal{C}} \in \mathcal{T}$.

Bemerkung 1.23. *1.10 und 1.13 $\Rightarrow$ jeder metrische Raum ist topologischer Raum (mit $\mathcal{T}$ = alle im Sinne von 1.10 „offenen" Mengen).*

Definition 1.24. Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum und $x \in X$. $V \subset X$ heißt *Umgebung* von x, falls $\exists U \subset X$, U offen (d.h.: $U \in \mathcal{T}$) mit $x \in U \subset V$.

Bemerkung 1.25. *Dieser Umgebungsbegriff stimmt, falls $\mathcal{T}$ von einer Metrik kommt (im Sinne von 1.10), mit dem in Definition 1.8 überein. ($\boxed{\text{Ü}}$).*

Definition 1.26. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *Hausdorff-Raum*, falls $\forall x, y \in X$ mit $x \neq y$ Umgebungen $U, V \subset X$ von x bzw. y existieren mit $U \cap V = \emptyset$.

Bemerkung 1.27. *Nach 1.23 und 1.9 ist jeder metrische Raum ein Hausdorff-Raum.*

2 Grenzwerte, Stetigkeit in metrischen Räumen

In diesem Kapitel: (X, d) metrischer Raum.

Definition 2.1. Seien $x_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt *konvergent* gegen $a \in X$, geschrieben

$$\lim_{k \to \infty} x_k = a \quad (\text{oder } \lim x_k = a,\ x_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} a,\ x_k \to a),$$

wenn gilt: $\forall$ Umgebungen U von a $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$x_k \in U \quad \forall k \geq N,$$

oder äquivalent dazu (da in jeder Umgebung U von a eine ε-Umgebung von a enthalten ist): $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$:

$$x_k \in B(a, \varepsilon) \quad \forall k \geq N \quad (\Leftrightarrow \quad \lim d(x_k, a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(x_k, a) < \varepsilon \quad \forall k \geq N).$$

Satz 2.2. $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *Folge in* $\mathbb{R}^n$,

$$x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann:

$$x_k \to a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} x_{ki} = a_i \ \ \forall 1 \leq i \leq n.$$

(vgl. Übungen.)

Beweis. „$\Rightarrow$“: Es gelte $x_k \to a$.
Dann $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$:

$$\|x_k - a\| < \varepsilon \quad \forall k \geq N.$$

Aber dann $\forall 1 \leq i \leq n$

$$|x_{ki} - a_i| \leq \underbrace{|x_k - a|}_{\text{Max. Norm!}} \leq \|x_k - a\| < \varepsilon \quad \forall k \geq N.$$

„$\Leftarrow$“: $x_{ki} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} a_i\ \forall 1 \leq i \leq n$
$\Rightarrow (x_{ki} - a_i)^2 \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0\ \forall 1 \leq i \leq n$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - a_i)^2 \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$
$\Rightarrow \|x_k - a\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - a_i)^2 \right)^{1/2} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0.$ □

Satz 2.3. *$A \subset X$ abg. $\Leftrightarrow$ $\forall$ Folgen (x_k) in A mit $x_k \to x \in X$ gilt: $x \in A$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei A abg. und $x_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k \to x \in X$.
Ang. $x \in A^{\mathcal{C}} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in A^{\mathcal{C}}$ $\forall k \geq N$ (da $A^{\mathcal{C}}$ offen, somit Umgebung von x) $\Rightarrow \lightning$.
„$\Leftarrow$“: Es gelte $\forall$ Folgen (x_k) in A mit $x_k \to x \in X$, dass $x \in A$.
Zeige: $A^{\mathcal{C}}$ offen.
Ang. $A^{\mathcal{C}}$ nicht offen $\Rightarrow \exists x \in A^{\mathcal{C}}$ $\forall \varepsilon > 0$: $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Für dieses x folgt also: $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists x_k \in B\big(x, \frac{1}{k}\big) \cap A$. Somit $x_k \to x$ für eine Folge (x_k) in $A \underset{\text{Vor.}}{\Rightarrow}$ $x \in A \lightning$. □

Definition 2.4. Eine Folge (x_k) in X heißt *Cauchy-Folge*, falls $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$d(x_k, x_m) < \varepsilon \quad \forall k, m \geq N.$$

(Cauchy-Folge „hängt von d ab“, nicht nur von zugehörigen offenen Mengen.)

Bemerkung 2.5. *(x_k) konvergent $\Rightarrow$ (x_k) Cauchy.*

Beweis. Sei $x := \lim x_k$ und $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$d(x, x_k) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N.$$

Somit $\forall m, k \geq N$

$$d(x_k, x_m) \leq d(x_k, x) + d(x, x_m) < \varepsilon.$$

□

Definition 2.6. (X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.

Satz 2.7. *$\mathbb{R}^n$ ist vollständig.*

Beweis. Sei (x_k) Cauchy in $\mathbb{R}^n$. Da $\forall k, m \in \mathbb{N}$ $|x_{ki} - x_{mi}| \leq \|x_k - x_m\|$ $\forall 1 \leq i \leq n$, folgt: $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $\mathbb{R}$ $\forall 1 \leq i \leq n$. $\underset{\mathbb{R}\text{ vollst.}}{\Rightarrow}$ $\exists x_i := \lim\limits_{k\to\infty} x_{ki} \in \mathbb{R}$ $\forall 1 \leq i \leq n \underset{2.2}{\Rightarrow} x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x := (x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$. □

Vervollständigung metrischer Räume

Sei (X, d) metrischer Raum. Definiere

$$X_d := \{\underbrace{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}_{=:(x_n)} \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge in } (X, d)\}.$$

Seien $(x_n), (y_n) \in X_d$. $(x_n), (y_n)$ heißen *äquivalent*, im Zeichen

$$(x_n) \sim (y_n),$$

falls

$$\lim d(x_n, y_n) = 0.$$

Für die *„Relation"* $\sim$ auf $X_d \times X_d$ gilt: $\forall (x_n), (y_n), (z_n) \in X_d$ Ü

(i) $(x_n) \sim (x_n)$.

(ii) $(x_n) \sim (y_n) \Rightarrow (y_n) \sim (x_n)$.

(iii) $(x_n) \sim (y_n)$ und $(y_n) \sim (z_n) \Rightarrow (x_n) \sim (z_n)$.

Damit ist $\sim$ eine *„Äquivalenzrelation"*. Für (x_n) definiere die zugehörige *Äquivalenzklasse* $\overline{(x_n)}$ durch

$$\overline{(x_n)}_{n\in\mathbb{N}} := \overline{(x_n)} := \{(y_n) \in X_d \mid (x_n) \sim (y_n)\}.$$

Jedes Element $(z_n) \in \overline{(x_n)}$ heißt *Vertreter* von $\overline{(x_n)}$, denn:
$(x_n) \sim (y_n) \Rightarrow \overline{(x_n)} \sim \overline{(y_n)}$, und für $(x_n), (y_n) \in X_d$ gilt:
entweder $\overline{(x_n)} = \overline{(y_n)}$ oder $\overline{(x_n)} \cap \overline{(y_n)} = \emptyset$.
Setze nun

$$\overline{X}_d := \{\overline{(x_n)} \mid (x_n) \in X_d\}.$$

Lemma 2.8. *(i)* $(x_n), (y_n) \in X_d \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ *(in* $\mathbb{R}_+$*).*

(ii) $(x_n), (y_n), (a_n), (b_n) \in X_d$ *mit* $(x_n) \sim (y_n)$ *und* $(a_n) \sim (b_n)$
$\Rightarrow \lim d(x_n, a_n) = \lim d(y_n, b_n)$.

(iii) $\overline{d} : \overline{X}_d \times \overline{X}_d \to \mathbb{R}_+$ *definiert durch*

$$\overline{d}(\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)}) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

*ist **wohldefiniert** und Metrik auf* $\overline{X}_d$.

Beweis. (i):

$$\begin{aligned}
&|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \\
&\leq |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_n)| + |d(x_m, y_n) - d(x_m, y_m)| \\
&\underset{\substack{\text{Symmetrie} \\ \text{\& Übungen}}}{\leq} \underbrace{d(x_n, x_m)}_{< \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n,m \geq N_1(\frac{\varepsilon}{2})} + \underbrace{d(y_n, y_m)}_{< \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n,m \geq N_2(\frac{\varepsilon}{2})}
\end{aligned}$$

Somit ist $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, also $\exists \lim d(x_n, y_n) \in \mathbb{R}_{(+)}$.

(ii):

$$|d(x_n, a_n) - d(y_n, b_n)| \underset{\substack{\text{vgl. Bew.}\\ \text{von (i)}}}{\leq} d(x_n, y_n) + d(a_n, b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(iii): Wegen (ii) ist $\overline{d}$ wohldefiniert. Außerdem ist klar, dass $\overline{d}(\overline{(y_n)}, \overline{(x_n)}) = \overline{d}(\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)}) \geq 0 \ \forall \overline{(x_n)}, \overline{(y_n)} \in \overline{X}_d$. Aber auch $\forall \overline{(x_n)}, \overline{(y_n)}, \overline{(z_n)} \in \overline{X}_d$

$$\begin{aligned}\overline{d}(\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)}) &= \lim d(x_n, y_n) \leq \lim d(x_n, z_n) + \lim d(z_n, y_n)\\ &= \overline{d}(\overline{(x_n)}, \overline{(z_n)}) + \overline{d}(\overline{(z_n)}, \overline{(y_n)}).\end{aligned}$$

□

Satz 2.9. *$(\overline{X}_d, \overline{d})$ ist vollständig.*

Beweis. Sei $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\overline{X}_d$ (bzgl. $\overline{d}$). Dann $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists x_n^m \in X$, $n \in \mathbb{N}$, mit $c_m = \overline{(x_n^m)}_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in X (bzgl. d), d.h. insbes. $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists k_m \in \mathbb{N}$:

$$d(x_n^m, x_{k_m}^m) < \frac{1}{m} \quad \forall n \geq k_m.$$

Definiere Folge in X durch

$$x_l := x_{k_l}^l \ , \quad l \in \mathbb{N}.$$

Beh. 1. (x_l) ist Cauchy in X (bzgl. d).

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit: $N \geq \frac{3}{\varepsilon}$ und

$$\overline{d}(c_l, c_{l'}) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall l, l' \geq N.$$

Dann $\forall l, l' \geq N$:

$$\begin{aligned}d(x_l, x_{l'}) &\leq d(x_{k_l}^l, x_n^l) + d(x_n^l, x_n^{l'}) + d(x_n^{l'}, x_{k_{l'}}^{l'})\\ &\leq \frac{1}{l} + d(x_n^l, x_n^{l'}) + \frac{1}{l'} \quad \forall n \geq \max(k_l, k_{l'}).\end{aligned}$$

Somit

$$d(x_l, x_{l'}) \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} d(x_n^l, x_n^{l'})}_{= \overline{d}(c_l, c_{l'}) < \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

□

Beh. 2. $c_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \overline{(x_l)}_{l\in\mathbb{N}}$ in $\overline{X}_d$ (bzgl. $\overline{d}$).

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Beh. 1 $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$d(x_m, x_l) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m, l \geq N.$$

Somit $\forall m \geq \max\left(N, \frac{2}{\varepsilon}\right)$

$$\begin{aligned}
\overline{d}(c_m, \overline{(x_l)}_{l\in\mathbb{N}}) &= \lim_{l\to\infty} d(x_l^m, x_l) = \lim_{l\to\infty} d(x_l^m, x_{k_l}^l) \\
&\leq \lim_{l\to\infty} \Big[\underbrace{d(x_l^m, x_{k_m}^m)}_{\leq \frac{1}{m}\ \forall l \geq k_m} + \underbrace{d(x_{k_m}^m, x_{k_l}^l)}_{\substack{= d(x_m, x_l) \\ < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall l \geq N}} \Big] \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Beh. 1 und Beh. 2 beweisen den Satz. □

Also kann man zu jedem metrischen Raum (X, d) einen vollständigen metrischen Raum $(\overline{X}_d, \overline{d})$ konstruieren! Was ist Zweck?

Definition 2.10. Seien (X_1, d_1), (X_2, d_2) zwei metrische Räume und $F : X_1 \to X_2$ Abbildung. F heißt *abstandstreu*, falls

$$d_2(F(x), F(y)) = d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X_1.$$

Ist F zusätzlich surjektiv, heißt F *Isometrie* und (X_1, d_1), (X_2, d_2) *isometrisch*.

Beachte, dass für $x \in X$ die konstante Folge $x_n := x$, $n \in \mathbb{N}$, im Zeichen (x) eine Cauchy-Folge in X ist, somit $(x) \in X_d$. Definiere $i : X \to \overline{X}_d$ durch

$$i(x) := \overline{(x)}, \quad x \in X.$$

Wegen $\overline{d}(\overline{(x)}, \overline{(y)}) = d(x, y)$ ist i abstandstreu von X nach $\overline{X}_d$, also sind (X, d) und $(i(X), \overline{d}_{i(X)})$ isometrisch.

Bemerkung 2.11. *Da $i : X \to \overline{X}_d$ (wirklich) „kanonisch“, identifiziert man oft $i(X)$ mit X. In diesem Sinne gilt dann also*

$$X \subset \overline{X}_d.$$

Definition 2.12. Seien $Y, Z \subset X$ mit $Y \subset Z$. Y heißt *dicht in Z*, falls $\overline{Y} = Z$ (d.h.: $\forall z \in Z\ \exists y_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, mit $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$).

Satz 2.13. *$i(X)$ ist dicht in $\overline{X}_d$ (bzw. im Sinne von 2.11: X ist dicht in $\overline{X}_d$).*

Beweis. Sei $\overline{(x_l)}_{l\in\mathbb{N}} \in \overline{X}_d$. Für $n \in \mathbb{N}$ fest definiere: $c_n \in \overline{X}_d$, als die zur konstanten Folge $(x_n, x_n, x_n, \ldots)$ gehörige Äquivalenzklasse. Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_l, x_n) < \varepsilon \quad \forall l, n \geq N.$$

Somit $\forall n \geq N$

$$\overline{d}(\overline{(x_l)}_{l\in\mathbb{N}}, c_n) = \lim_{l\to\infty} d(x_l, x_n) < \varepsilon.$$

□

Bemerkung 2.14. *Haben somit vollständigen metrischen Raum konstruiert, der X als dichte Menge enthält (vgl. 2.11)!*

Definition 2.15. Ein vollständiger metrischer Raum (X_1, d_1) heißt *Vervollständigung* von (X, d), falls $\exists$ eine abstandstreue Abbildung $G : X \to X_1$ mit $G(X)$ dicht in X_1.

Satz 2.16. *Sei (X, d) metrischer Raum. Dann:*

(i) $\exists$ Vervollständigung (X_1, d_1) von (X, d).

(ii) Diese Vervollständigung ist bis auf Isometrie ***eindeutig***, *d.h.: ist (X_2, d_2) eine zweite Vervollständigung von (X, d), so $\exists$ Isometrie $F : X_1 \to X_2$.*

Beweis. (i): Klar nach 2.9, 2.13 (wähle $(X_1, d_1) := (\overline{X}_d, \overline{d})$ und $G := i$).

(ii): Z.z.: $\exists$ Isometrie $F : X_2 \to \overline{X}_d$.
Sei $G : X \to X_2$ zu (X_2, d_2) (gemäß 2.15) gehörige abstandstreue Abbildung. Sei $x \in X_2$. Dann $\exists x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$d_2(G(x_n), x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

somit $(G(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere Cauchy in X_2. Aber $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, x_m) = d_2(G(x_n), G(x_m)), \quad \text{(da } G : X \to X_2 \text{ abstandstreu)},$$

also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in X. Beachte, dass dies' für **jede** Folge (x_n) in X mit:

$$d_2(G(x_n), x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{1}$$

gilt. Sei nun zu $x \in X_2$ (x_n) eine solche und definiere

$$F(x) := \overline{(x_n)}.$$

Dann ist $F : X_2 \to \overline{X}_d$ wohldefiniert. (Denn sei (y_n) weitere Folge in X mit (1), dann (da $G : X \to X_2$ abstandstreu)

$$d(x_n, y_n) = d_2(G(x_n), G(y_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} d_2(x, x) = 0$$

nach Übungen. Also $(x_n) \sim (y_n)$, somit $\overline{(x_n)} = \overline{(y_n)}$.)

Beh. 1. F ist abstandstreu.

Beweis. Seien $x, y \in X_2$ und $\overline{(x_n)} = F(x)$, $\overline{(y_n)} = F(y)$. Dann (vgl. oben) $\lim d_2(G(x_n), x) = 0 = \lim d_2(G(y_n), y)$. Somit

$$\begin{aligned}\overline{d}(F(x), F(y)) = \overline{d}(\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)}) &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \\ &\underset{\substack{G:X\to X_2\\ \text{abstandstreu}}}{=} \lim_{n\to\infty} d_2(G(x_n), G(y_n)) \\ &\underset{\text{vgl. Übungen}}{=} d_2(x, y)\end{aligned}$$

□

(Beachte: Bisher Vollständigkeit von (X_2, d_2) nicht verwandt.)

Beh. 2. F ist surjektiv.

Beweis. Sei $\overline{(x_n)} \in \overline{X}_d$, also (x_n) Cauchy in (X, d).
$\underset{\substack{G:X\to X_2\\ \text{abstandstreu}}}{\Rightarrow}$ $(G(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in X_2.
$\underset{X_2 \text{ vollst.}}{\Rightarrow}$ $\exists x \in X_2$: $\lim_{n\to\infty} G(x_n) = x$.
Aber nach Konstruktion von F gilt:

$$F(x) = \overline{(x_n)}.$$

□

$\Rrightarrow F : X_2 \to \overline{X}_d$ Isometrie.

□

Bemerkung 2.17. *Beachte, dass obige Konstruktion auch funktioniert, wenn d statt:*

$$„\ d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \forall x, y \in X\ “$$

nur

$$„\ d(x, y) = 0 \quad \Leftarrow \quad x = y \quad \forall x, y \in X\ “$$

erfüllt („Halbmetrik“).

Definition 2.18. Sei $A \subset X$. Dann heißt

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$$

Durchmesser von A. A heißt *beschränkt*, falls $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Offenbar: A beschränkt $\Leftrightarrow \exists a \in X, r > 0$: $A \subset B(a,r)$. Es gilt: $\operatorname{diam} B(a,r) \leq 2r$.

Bemerkung 2.19. *(x_n) Cauchy in $X \Rightarrow \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt.*

Beweis. $\exists N \in \mathbb{N}$: $d(x_n, x_m) < 1 \ \forall n,m \geq N$. Sei

$$c := \max\{d(x_n, x_m) \mid n,m \leq N\}.$$

Dann

$$\operatorname{diam}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \max(1,c) < \infty.$$

$\square$

Definition 2.20. Ein normierter Raum $(V, \| \ \|)$ heißt *vollständig*, falls als metrischer Raum (d.h.: mit $d(x,y) := \|x-y\|$) vollständig.

Satz 2.21. *$(B(X), \| \ \|_X)$ (vgl. 1.6 (iii)) ist vollständig.*

Beweis. (f_n) Cauchy in $B(X)$
$\Rightarrow (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $\mathbb{R}$ $\forall x \in X$
$\Rightarrow \exists f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ in $\mathbb{R}$ $\forall x \in X$.
Weiter $\forall x \in X$

$$|f(x)| = \lim |f_n(x)| \leq \sup_n \|f_n\|_X \underset{2.19}{<} \infty,$$

also $f \in B(X)$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n - f_m\|_X < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N.$$

Somit $\forall n \geq N$

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \\ &\leq \limsup_{m\to\infty} \|f_m - f_n\|_X \\ &< \varepsilon \qquad \forall x \in X, \end{aligned}$$

also

$$\|f - f_n\|_X \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

$\square$

Bemerkung 2.22. *X vollständig, $A \subset X$, A abgeschlossen $\Rightarrow (A, d_A)$ vollständig.*

Beweis. (x_n) Cauchy in A (bzgl. d_A) $\Rightarrow (x_n)$ Cauchy in X (bzgl. d) $\Rightarrow \exists x := \lim x_n \in X \underset{2.3}{\Rightarrow} x \in A$. $\square$

Satz 2.23 („Schachtelungsprinzip"). *Sei (X, d) vollständig und $\emptyset \neq A_k \subset X$, $k \in \mathbb{N}$, mit A_k abgeschlossen, $A_k \supset A_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, und*

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(A_k) = 0.$$

Dann $\exists x \in X$:

$$\{x\} = \bigcap_k A_k.$$

Beweis. $\forall n\ \exists x_n \in A_n$. Dann

$$d(x_n, x_m) \le \operatorname{diam} A_k \quad \forall n, m \ge k,$$

somit (x_n) Cauchy. Sei $x := \lim x_n$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann

$$x_n \in A_k \quad \forall n \ge k.$$

Also, da A_k abgeschlossen, $x \in A_k$. Somit $x \in \bigcap_k A_k$. Für jedes $y \in \bigcap_k A_k$ gilt aber

$$d(x, y) \le \operatorname{diam} A_k \quad \forall k$$
$$\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow x = y$. $\square$

Definition 2.24. Sei (X_1, d_1) weiterer metrischer Raum. $f : X \to X_1$ heißt *stetig in $a \in X$*, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$x \in X : \ d(x, a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_1(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

(D.h.: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $f(B^d(a, \delta)) \subset B^{d_1}(f(a), \varepsilon)$.)
f heißt *stetig auf X*, falls f stetig in allen $a \in X$ ist. f heißt *gleichmäßig stetig auf X*, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$x, y \in X, \ d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_1(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Bemerkung 2.25. *(i) f abstandstreu $\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig.*

(ii) *Nach Übungen gilt:* $\forall A \subset X$

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y) \quad \forall x, y \in X.$$

Somit ist $x \mapsto d(x,A)$ *gleichmäßig stetig auf* X. Ü
(Dabei definiere $d(x,A) := \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$ *für* $A \subset X$, $x \in X$ *und* $d(A,B) := \inf\{d(x,y) \mid x \in A,\ y \in B\}$ *für* $A, B \subset X$. *Für* $x, y \in X$ *gilt* $d(x,y) = d(\{x\},\{y\})$.*)*

Satz 2.26. *Sei* (X_1, d_1) *weiterer metrischer Raum und* $f : X \to X_1$, $a \in X$. *Dann:*

(i) f *stetig in* a $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ *(d.h.* $\forall$ *Folgen* (x_n) *in* X *mit* $x_n \to a$, *folgt* $f(x_n) \to f(a)$*).*

(ii) f *stetig in* a $\Leftrightarrow$ *für jede Umgebung* $V \subset X_1$ *von* $f(a)$ $\exists$ *Umgebung* $U \subset X$ *von* a *mit:* $f(U) \subset V$.

(iii) f *stetig auf* X $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(V)$ *offen in* X $\forall V$ *offen in* X_1.
$(\underset{\text{Ü}}{\Leftrightarrow}$ $f^{-1}(A)$ *abgeschlossen in* X $\forall A$ *abgeschlossen in* X_1.*)*

Beweis. (i): „$\Leftarrow$“: f nicht stetig in a
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in X$ mit $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$, aber $d_1(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$
$\Rightarrow \lim x_n = a$, aber $f(x_n) \not\to f(a)$.
„$\Rightarrow$“: Es gelte: f stetig in a.
Sei (x_n) Folge in X mit $x_n \to a$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists \delta > 0$ mit:

$$d(x,a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_1(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

$\exists N \in \mathbb{N}$: $d(x_n, a) < \delta\ \forall n \geq N$. Somit $d_1(f(x_n), f(a)) < \varepsilon\ \forall n \geq N$, also $f(x_n) \to f(x)$.

(ii): Klar (da es reicht, „rechte Seite“ für Kugeln zu haben)!

(iii): „$\Rightarrow$“: Sei f stetig auf X. Sei V offen in X_1 und $a \in f^{-1}(V)$.
Z.z. $\exists \delta > 0$: $B^d(a,\delta) \subset f^{-1}(V)$. Da $f(a) \in V$ und V offen, $\exists \varepsilon > 0$: $B^{d_1}(f(a), \varepsilon) \subset V$. Da f stetig in a, $\exists \delta > 0$: $f(B^d(a,\delta)) \subset B^{d_1}(f(a), \varepsilon)$.
$\Rightarrow B^d(a,\delta) \subset f^{-1}(B^{d_1}(f(a),\varepsilon)) \subset f^{-1}(V)$.
„$\Leftarrow$“: Sei $f^{-1}(V)$ offen in X für jede offene Menge $V \subset X_1$. Sei $a \in X$ und $\varepsilon > 0$.
Dann $a \in f^{-1}(B^{d_1}(f(a),\varepsilon))$ offen in X, also $\exists \delta > 0$:
$B^d(a,\delta) \subset f^{-1}(B^{d_1}(f(a),\varepsilon))$
$\Rightarrow f(B^d(a,\delta)) \subset B^{d_1}(f(a),\varepsilon)$
$\Rightarrow f$ stetig in a.

□

Bemerkung. *„Stetigkeit“ somit nur von Umgebungsbegriff bzw. offenen Mengen (Topologie) abhängig.*

Satz 2.27. *Seien X, Y, Z metrische Räume und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. f stetig in $a \in X$, g stetig in $f(a) \Rightarrow g \circ f : X \to Z$ stetig in a.*

Beweis. $x_n \to a \underset{2.26\,(i)}{\Rightarrow} f(x_n) \to f(a) \underset{2.26\,(i)}{\Rightarrow} (g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(a))$
$\underset{2.26\,(i)}{\Rightarrow} g \circ f$ stetig in a. □

Sei für $1 \leq k \leq n$, $\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ def. durch $\pi_k(x_1, \ldots, x_n) := x_k$ („*Koordinatenabbildung*“). Beachte, falls $f : X \to \mathbb{R}^n$ und $f_k := \pi_k \circ f$, $1 \leq k \leq n$ („*Komponentenfunktionen*“), dann

$$f = (f_1, \ldots, f_n).$$

Satz 2.28. *$f : X \to \mathbb{R}^n$ stetig in $a \in X \Leftrightarrow$ Alle Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_n$ sind stetig in $a \in X$.*

Beweis. 2.26 (i) und 2.2. □

Satz 2.29. *Folgende Abbildungen sind stetig.*

(i) $\mathrm{add} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$,

(ii) $\mathrm{mult} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$,

(iii) $\mathrm{quot} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$.

Beweis. Sei $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{k \to \infty} (x_k, y_k) = (x, y).$$

$\underset{2.2}{\Rightarrow} x_k \to x, y_k \to y \Rightarrow x_k \overset{+}{\cdot} y_k \to x \overset{+}{\cdot} y$.
Ist $y \neq 0 \neq y_k \ \forall k$, so folgt auch $x_k \cdot y_k^{-1} \to xy^{-1}$.
$\underset{2.26\,(i)}{\Rightarrow}$ Beh. □

Korollar 2.30. *$f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann $f + g : X \to \mathbb{R}$, $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $g(x) \neq 0 \ \forall x \in X$, so ist auch $\frac{f}{g} : X \to \mathbb{R}$ stetig.*

Beweis. Nach 2.28 ist $(f, g) : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig. Da $f + g = \mathrm{add} \circ (f, g)$, $f \cdot g = \mathrm{mult} \circ (f, g)$, $\frac{f}{g} = \mathrm{quot} \circ (f, g)$, folgt somit Beh. aus 2.29. □

Beispiele 2.31. (i) Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n},$$

wobei $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, heißt *Monom*. $r := k_1 + \cdots + k_n$ heißt *Grad* des Monoms. *Polynom(funktion)* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vom *Grad* $\leq r$ ist Linearkombination von Monomen vom Grad $\leq r$, also

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1 + \cdots + k_n \leq r} c_{k_1 k_2 \cdots k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

mit $c_{k_1 k_2 \cdots k_n} \in \mathbb{R}$. Koordinatenabbildung π_k sowie Konstanten sind stetig. Somit nach 2.30 jedes Polynom stetig.

(ii) $f : X \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \{x \in X \mid f(x) < c\}$ offen, $\{x \in X \mid f(x) = c\}$ abg. $\forall c \in \mathbb{R}$.

Banachscher Fixpunktsatz

Satz 2.32. *Sei (X, d) **vollständig** und $f : X \to X$ mit:*

$$\exists \alpha \in]0,1[\quad \textit{mit:} \quad d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

(i) $\exists$ genau ein Fixpunkt *für f (d.h.: $x \in X$ mit $f(x) = x$).*

*(ii) Für **jedes** $x_0 \in X$ gilt $f^n(x_0)$ $(:= \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-mal}}(x_0)) \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ und darüberhinaus*

$$d(x, f^m(x_0)) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(f(x_0), x_0) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Sei $x_0 \in X$ (beliebig). Dann $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(f^{n+1}(x_0), f^n(x_0)) &\leq \alpha d(f^n(x_0), f^{n-1}(x_0)) \\ &\leq \alpha^2 d(f^{n-1}(x_0), f^{n-2}(x_0)) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^n d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

Somit $\forall n, m \in \mathbb{N}, n > m$

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), f^m(x_0)) &\leq d(f^n(x_0), f^{n-1}(x_0)) + d(f^{n-1}(x_0), f^m(x_0)) \qquad (*) \\ &\vdots \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \underbrace{d(f^k(x_0), f^{k-1}(x_0))}_{\leq \alpha^{k-1} d(f(x_0), x_0)} \\ &\leq \Big(\underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} \alpha^{k-1}}_{\text{geom. Reihe}} \Big) d(f(x_0), x_0) \\ &\underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Somit $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in X. **Da** X **vollständig**

$$\exists x := \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) \quad \in X.$$

Dann

$$\begin{aligned} f(x) = f(\lim f^n(x_0)) &\underset{\substack{2.26\text{ (i),} \\ f \text{ stetig!}}}{=} \lim f(f^n(x_0)) \\ &= \lim f^{n+1}(x_0) = x. \end{aligned}$$

Weiter nach $(*)$ $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(x, f^m(x_0)) \underset{\text{Übungen}}{=} \lim_{n\to\infty} d(f^n(x_0), f^m(x_0)) &\underset{(*)}{\leq} \Big(\underbrace{\sum_{k=m+1}^{\infty} \alpha^{k-1}}_{= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{m+k}} \Big) d(f(x_0), x_0) \\ = \alpha^m \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \Big) d(f(x_0), x_0) &= \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

Damit (ii) gezeigt und auch (i) bis auf Eindeutigkeit. Sei dazu $y \in X$ mit $f(y) = y$. Dann

$$\begin{aligned} & d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \underset{\alpha<1}{\leq} d(x, y) \\ \Rightarrow\ & (1-\alpha) d(x, y) = 0 \underset{\alpha\in]0,1[}{\Rightarrow} d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

$\square$

Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 2.33. Sei (X_1, d_1) weiterer metrischer Raum, $f_n, f : X \to X_1$, $n \in \mathbb{N}$. (f_n) *konvergiert gleichmäßig* gegen f, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N$ gilt:

$$d_1(f_n(x), f(x)) \underset{(=)}{<} \varepsilon \quad \forall x \in X,$$

(oder äquivalent dazu:

$$\sup_{x \in X} d_1(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N\ ).$$

Satz 2.34. *Sei (X_1, d_1) weiterer metrischer Raum, $f, f_n : X \to X_1$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f_n \to f$ gleichmäßig. Ist f_n stetig in $a \in X\ \forall n \in \mathbb{N}$, so auch f.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\exists N \in \mathbb{N} : \quad \sup_{x \in X} d_1(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq N,$$

und $\exists \delta = \delta(N) > 0$:

$$d(x, a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_1(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Somit:

$$\begin{aligned} d(x,a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_1(f(x), f(a)) \leq &\quad d_1(f(x), f_N(x)) + d_1(f_N(x), f_N(a)) \\ &+ d_1(f_N(a), f(a)) \\ < &\quad \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Korollar 2.35. *$C(X) := \{f \in B(X) \mid f$ ist stetig$\}$ ist **abgeschlossener** Untervektorraum von $(B(X), \|\ \|_X)$.*

Beweis. 2.3 und 2.34. □

Lineare Abbildungen

Satz 2.36. *Seien $(V, \|\ \|_V)$, $(W, \|\ \|_W)$ normierte Räume und $A : V \to W$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) *A gleichmäßig stetig.*

(ii) *A stetig.*

(iii) *A stetig in* 0 $(\in V)$, *(oder irgendein* $x \in V$ *!* $\boxed{\text{Ü}}$ *).*

(iv) $\|A\| := \sup\{\|A(x)\|_W \mid x \in V \text{ mit } \|x\|_V \leq 1\} < \infty$, „Norm *von* A".

(v) $\exists C \in [0, \infty[$ *mit* $\|A(x)\|_W \leq C\|x\|_V\ \forall x \in V$.

Bemerkung. $\|A\|$ *ist „minimales* C*" in (v)! Denn:* $\|A\| = \sup\{\|A(x)\|_W \mid x \in V \text{ mit } \|x\|_V = 1\}$. $\boxed{\text{Ü}}$

Beweis von Satz 2.36. Der Einfachheit halber: $\|\ \| := \|\ \|_V$, $\|\ \| := \|\ \|_W$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Trivial!

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Trivial!

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Es gelte (iii). Dann $\exists \delta > 0$: $\|x\| < \delta \Rightarrow \|A(x)\| < 1$. Somit, falls $x \in V$ mit $\|x\| \leq 1$, dann $\|\frac{\delta}{2}x\| < \delta$, also $\|A(x)\| = \frac{2}{\delta}\|A(\frac{\delta}{2}x)\| < \frac{2}{\delta} \Rightarrow$ (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (v): Es gelte (iv). Dann $\forall x \in V \setminus \{0\}$

$$\|A(x)\| = \|x\| \, \underbrace{\|A(\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\text{hat Norm } = 1})\|}_{\leq \|A\|} \leq \underbrace{\|A\|}_{=:C}\|x\|.$$

$\Rightarrow$ (v).

(v) $\Rightarrow$ (i): Es gelte (v). Dann

$$\|A(x) - A(y)\| = \|A(x-y)\| \leq C\|x-y\| \quad \forall x, y \in V.$$

$\Rightarrow$ (i).

$\square$

Beispiele 2.37. (i) Sei $V := C[a,b]$ $(:= \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\})$ mit $\|\ \| := \|\ \|_{[a,b]}$ (= sup-Norm). Sei $I : C[a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$I(f) := \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dann I linear und stetig, da

$$|I(f)| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \leq (b-a)\|f\| \quad \forall f \in C[a,b].$$

(ii) Sei $V := C^1[a,b]$ $(:= \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ stetig diff.bar$\})$ mit $\| \ \| := \| \ \|_{[a,b]}$. Sei $D : C^1[a,b] \to C[a,b]$ definiert durch

$$D(f) := f'.$$

Dann D linear!
Beh. D nicht stetig. (Nehme Fall: $a = 0$, $b = 1$!)

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f_n(x) := x^n$, $x \in [0,1]$, dann $f_n \in C^1[0,1]$ und $\|f_n\| = 1$ und $D(f_n) = nx^{n-1}$, also $\|D(f_n)\| = n$, falls $n \geq 1$. Somit

$$\sup\{\|D(f)\| \mid f \in C^1[0,1],\ \|f\| = 1\} = \infty.$$

□

(iii) Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und $(a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}$ zugehörige Matrix bzgl. der kanonischen Basen.
Beh.

$$\max_{i,k} |a_{ik}| \leq \|A\| \leq \sqrt{nm} \max_{i,k} |a_{ik}|.$$

Also A **stetig**!

Beweis. $e_k := (0,0,\ldots,0,\underbrace{1}_{k\text{-te}},0,\ldots,0)^T$, $1 \leq k \leq n$. Dann

$$\|A(e_k)\| = \left\| \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \right\| \underset{1.6}{\geq} \left| \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \right| = \max_{1 \leq i \leq m} |a_{ik}|.$$

$\underset{\|e_k\|=1}{\Rightarrow} \|A\| \geq \max_{1 \leq i \leq m} |a_{ik}| \ \forall k \Rightarrow \|A\| \geq \max_{i,k} |a_{ik}|.$
Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \leq 1$. Dann

$$\|A(x)\| = \|(y_1, \ldots, y_m)^T\| = \left(\sum_{i=1}^m y_i^2 \right)^{1/2}$$

mit $y_i := \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$, $1 \leq i \leq m$. Aber

$$|y_i| \underset{\substack{\text{Cauchy-}\\\text{Schwarz}}}{\leq} \|(a_{i1}, \ldots, a_{in})\| \underbrace{\|x\|}_{\leq 1} \underset{1.6}{\leq} \sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq n} |a_{ik}| \leq \sqrt{n} \max_{i,k} |a_{ik}|.$$

$\Rrightarrow \|A(x)\| \leq \sqrt{n}\sqrt{m} \max_{i,k} |a_{ik}|$. $\square$

3 Kompaktheit

Sei (X, d) metrischer Raum.

Definition 3.1. (i) Sei $A \subset X$. Eine *offene Überdeckung* von A ist Familie $(U_i)_{i \in I}$ (I **beliebige** Indexmenge) von offenen $U_i \subset X$ mit

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

(ii) $A \subset X$ heißt *kompakt*, falls es für **jede** offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von A **endlich viele** Indizes $i_1, \ldots, i_k \in I$ gibt mit

$$A \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_k}.$$

(Kurz: **Jede** offene Überdeckung von A hat **endliche** Teilüberdeckung.)

Bemerkung 3.2. *(i) (x_n) Folge in X mit $x_n \to a \in X$. Dann*

$$A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\} \quad \textit{kompakt}.$$

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ **beliebige** offene Überdeckung von A. Da $a \in \bigcup_{i \in I} U_i$ $\exists i^* \in I$ mit $a \in U_{i^*}$, somit $\exists N = N(U_{i^*}) \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n \in U_{i^*} \quad \forall n \geq N.$$

Außerdem $\forall 0 \leq n < N$ $\exists i_n \in I$ mit $x_n \in U_{i_n}$, also

$$A \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_{N-1}} \cup U_{i^*}.$$

□

(ii) In (i) muss Grenzwert dazugenommen werden. Sonst falsch!
Beispiel. *$X = \mathbb{R}$, $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*
Beh. *$A := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$* ***nicht*** *kompakt.*

Beweis. Wähle $U_1 :=]\frac{1}{2}, 2[$, $U_n :=]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[$ $\forall n \geq 2$.
Dann jedes U_n offen und

$$A \subset \bigcup_{n \geq 1} U_n.$$

Somit $(U_n)_{n\geq 1}$ offene Überdeckung von A (mit $I := \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Aber $U_n \cap A = \{\frac{1}{n}\}$ $\forall n \geq 1$. Somit kann **kein** U_n weggelassen werden, da sonst die restlichen A nicht mehr überdecken.
$\Rrightarrow$ $\exists$ eine Überdeckung von A **ohne** endliche Teilüberdeckung.
Somit A **nicht** kompakt. $\square$

Satz 3.3. *$X := \mathbb{R}^n$. Sei $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$, $1 \leq i \leq n$. Dann ist*

$$Q := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i,\ 1 \leq i \leq n\} \quad \text{„abg. Quader"}$$
$$(= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n])$$

kompakt.

Beweis. Sei $(U_i)_{i\in I}$ **beliebige** offene Überdeckung von Q.
Z.z.: $\exists$ **endliche** Teilüberdeckung.
Ang. $\exists$ keine $i_1, \dots, i_k \in I$ mit $Q \subset \bigcup\limits_{l=1}^{k} U_{i_l}$.
Konstruiere durch vollständige Induktion Folge von abg. Quadern
$(Q =)Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots$ mit:

(i) Q_m kann **nicht** durch endlich viele der U_i, $i \in I$, überdeckt werden.

(ii) $\operatorname{diam}(Q_m) = 2^{-m} \operatorname{diam}(Q)$.

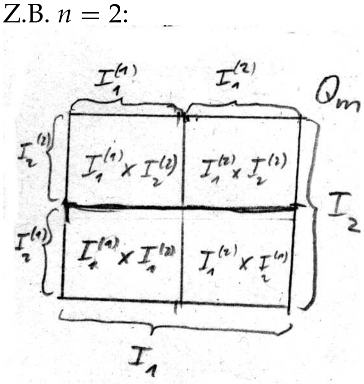
Setze $Q_0 := Q$. Sei $Q_m = I_1 \times \cdots \times I_n$ (mit $I_1, \dots, I_n$ abg. beschränkte Intervalle in $\mathbb{R}$) schon konstruiert. Zerlege I_j in zwei abg. Intervalle der halben Länge

$$I_j = I_j^{(1)} \cup I_j^{(2)}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Dann

$$\underbrace{Q_m}_{\substack{\text{Wissen: kann \textbf{nicht}}\\ \text{durch endlich viele}\\ \text{der } U_i\text{'s überdeckt werden.}}} = \bigcup_{\substack{(s_1,\dots,s_n)\\ \in\{1,2\}^n}} \underbrace{I_1^{(s_1)} \times I_2^{(s_2)} \times \cdots \times I_n^{(s_n)}}_{\substack{\Rightarrow \text{ mindestens einer von diesen, \textbf{nennen wir} ihn } Q_{m+1},\\ \text{kann nicht durch endlich viele der}\\ U_i\text{'s überdeckt werden.}}}$$

Z.B. $n = 2$:



Dann auch: $\operatorname{diam}(Q_{m+1}) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(Q_m) = 2^{-(m+1)}\operatorname{diam}(Q)$.
$\Rrightarrow Q_{m+1}$ erfüllt (i), (ii).
Nach 2.23 $\exists$ somit $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\{a\} = \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} Q_m$. Da

$$a \in Q \subset \bigcup_{i\in I} U_i,$$

$\exists i_0 \in I$ mit $a \in U_{i_0}$, somit $\exists \varepsilon > 0$: $B(a,\varepsilon) \subset U_{i_0}$. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{diam}(Q_m) = 2^{-m}\operatorname{diam}(Q) < \varepsilon$. Dann, da $a \in Q_m$,

$$Q_m \subset B(a,\varepsilon) \subset U_{i_0} \quad \lightning \text{ zu (i).}$$

$\Rrightarrow$ **Annahme** falsch. $\Rrightarrow$ $\exists$ endliche Teilüberdeckung. $\square$

Satz 3.4. *$A \subset X$, A kompakt $\Rightarrow$ A abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis. Zeige: A beschränkt.
Sei $a \in X$. Dann $A \subset X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{B(a,n)}_{\text{offen!}}$.

$\underset{A \text{ kp.}}{\Rrightarrow}$ $\exists n_1,\dots,n_k$: $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} B(a,n_i)$. Sei $N := \max\{n_1,\dots,n_k\}$. Dann $A \subset B(a,N)$, also A **beschränkt**.
Zeige: A abg. **bzw.**: $X \setminus A$ offen.
$x \in X \setminus A \Rightarrow A \subset X \setminus \{x\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\{y \in X \;\middle|\; d(y,x) > \frac{1}{n}\right\}}_{=:U_n \text{ offen!}}$

$\underset{A \text{ kp.}}{\Rrightarrow}$ $\exists n_1,\dots,n_k$: $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{n_i}$
$\Rightarrow A \subset U_N$ mit $N := \max\{n_1,\dots,n_k\}$.
$\Rightarrow B\big(x,\frac{1}{N}\big) \subset X \setminus A$
$\Rrightarrow X \setminus A$ offen. $\square$

Satz 3.5. *$A \subset K \subset X$, K kompakt, A abg. $\Rightarrow$ A kompakt.*

Beweis. $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von A
$\Rightarrow K \subset \underbrace{X \setminus A}_{\text{offen}} \cup \bigcup_{i\in I} \underbrace{U_i}_{\text{offen}}$
$\underset{K \text{ kp.}}{\Rightarrow} \exists i_1, \dots, i_k \in I\colon K \subset X \setminus A \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$
$\Rightarrow A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$
$\Rrightarrow A$ kompakt. □

Satz 3.6 (Heine-Borel). *$A \subset \mathbb{R}^n$. Dann:*

$$A \text{ kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ abgeschlossen } \textbf{\textit{und}} \text{ beschränkt}.$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: 3.4 mit $X = \mathbb{R}^n$.
„$\Leftarrow$“: Sei A abg. **und** beschränkt.
A beschränkt $\Rightarrow \exists$ abg. Quader Q mit $A \subset Q$. Somit, da Q kompakt nach 3.3 und A abg. nach Voraussetzung, folgt mit 3.5: A kompakt. □

Bemerkung 3.7. *(i) Sei $A \subset \mathbb{R}$, A kompakt. Dann A beschränkt, also $\exists \sup A, \inf A \in \mathbb{R}$. Da $\exists (x_n), (y_n)$ in A mit $x_n \to \sup A$, $y_n \to \inf A$, folgt aus 2.3 (da A insbes. abg.):*

$$\inf A, \sup A \in A.$$

(ii) 3.6 falsch für beliebige metrische Räume!

Satz 3.8. *Sei (X_1, d_1) weiterer metrischer Raum und $f : X \to X_1$ stetig.*

(i) $K \subset X$, K kompakt $\Rightarrow f(K)$ kompakt (in (X_1, d_1)). (Insbes. $(\overline{\mathbb{R}}, d_s)$ in Übungen kompakt!)

(ii) X kompakt $\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig.

(iii) X *kompakt*, $X_1 = \mathbb{R} \quad \Rightarrow$ *f beschränkt und nimmt sein Minumum und Maximum an, d.h.: $\exists p, q \in X$ mit $f(p) = \sup\{f(x) \mid x \in X\}$ und $f(q) = \inf\{f(x) \mid x \in X\}$*

Beweis. (i): $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von $f(K)$ (in (X_1, d_1))
$\underset{2.26\text{ (ii)}}{\Rightarrow} (f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ offene Überdeckung von K

$$\underset{K \text{ kp.}}{\Rightarrow} \exists i_1, \dots, i_k \in I\colon K \subset \bigcup_{n=1}^{k} f^{-1}(U_{i_n}) = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{k} U_{i_n})$$

$$\Rightarrow f(K) \subset \bigcup_{n=1}^{k} U_{i_n}$$

$\Rrightarrow f(K)$ kompakt (in (X_1, d_1)).

(ii): Sei $\varepsilon > 0$. Zu $x \in X$ $\exists \delta_x > 0$ mit: $f(B(x, \delta_x)) \subset B\big(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\big)$. Aber

$$X = \bigcup_{x \in X} B\Big(x, \frac{1}{2}\delta_x\Big).$$

Somit, da X kompakt, $\exists x_1, \ldots, x_k \in X$: $X = \bigcup\limits_{n=1}^{k} B(x_n, \delta_{x_n})$. Sei $\delta := \frac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_k}\}$. Dann $\forall z, y \in X$ mit $d(z, y) < \delta$: $\exists 1 \le n \le k$ mit $z \in B\big(x_n, \frac{1}{2}\delta_{x_n}\big)$ und somit

$$d(y, x_n) \le \underbrace{d(y, z)}_{<\delta \le \frac{1}{2}\delta_{x_n}} + \underbrace{d(z, x_n)}_{<\frac{1}{2}\delta_{x_n}} < \delta_{x_n} \quad ,$$

somit $y \in B(x_n, \delta_{x_n})$. Dann aber

$$d_1(f(z), f(y)) \le \underbrace{d_1(f(z), f(x_n))}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{d_1(f(x_n), f(y))}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon.$$

(iii): f ist beschränkt nach (i) und 3.4. Somit nach 3.7 $\inf f(X), \sup f(X) \in f(X)$, also $\exists q, p \in X$ mit

$$\inf f(X) = f(q), \quad \sup f(X) = f(p).$$

$\square$

Satz 3.9. *$A, K \subset X$, A abg., K kompakt mit $A \cap K = \emptyset \Rightarrow d(K, A) > 0$.*

Beweis. Wissen nach Übungen

$$x \mapsto d(x, A) \quad (:= \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}), \quad x \in X,$$

ist (gleichmäßig) stetig von X nach $\mathbb{R}$. Somit nach 3.8 (iii) $\exists x_0 \in K$: $d(K, A) = d(x_0, A)$. Aber $d(x_0, A) > 0$, denn sogar $d(x, A) > 0 \; \forall x \in K (\subset X \setminus A)$ wegen folgendem:

Lemma 3.10. *$x \in X$, $A \subset X$. Dann:*

$$d(x, A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \overline{A}.$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $d(x, A) = 0$.
Ang. $x \notin \overline{A} \Rightarrow x \in \underbrace{X \setminus \overline{A}}_{\text{offen}} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: $B(x, \varepsilon) \subset X \setminus \overline{A} \Rightarrow d(x, A) \ge \varepsilon > 0$ ↯.

„$\Leftarrow$“: $x \in \overline{A} \underset{\text{Übungen}}{\Rightarrow} \exists x_n \in A, n \in \mathbb{N}$: $x_n \to x \Rightarrow d(x, A) \le d(x, x_n) \to 0$. $\square$

$\square$

Bemerkung 3.11. *Ist K in 3.9 **nur** abgeschlossen, so ist die Behauptung falsch!*

Beispiel. $X = \mathbb{R}^2$, $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ (= „*Achsenkreuz*“), $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ (= „*Hyperbel*“). Dann A, K beide abg. aber nicht kompakt, da nicht beschränkt. Weiterhin $A \cap K = \emptyset$, aber $d(K, A) = 0$.

Satz 3.12 (Bolzano-Weierstraß). *$A \subset X$, A kompakt und $x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Dann $\exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $a \in A$ mit $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$.*

Beweis. **Ang.** keine Teilfolge konvergiert in A
$\Rightarrow \forall y \in A\ \exists \varepsilon_y > 0$: $\#(B(y, \varepsilon_y) \cap \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ **endlich** (denn: sonst $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists n_k \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_k} \in B\big(y, \frac{1}{k}\big)$ und $n_k > n_{k-1}$, dann $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge mit $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$ $\lightning$).
Aber $A \subset \bigcup\limits_{y\in A} \underbrace{B(y, \varepsilon_y)}_{\text{offen}}$, also (da A kompakt) $\exists y_1, \dots, y_m \in A$ mit

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{m} \underbrace{B(y_n, \varepsilon_{y_n})}_{\substack{\text{enthält höchstens}\\ \text{endlich viele Folgenglieder}}} \Rightarrow \substack{A \text{ enthält höchstens}\\ \text{endlich viele Folgenglieder}}$$

$\underset{\substack{x_n \in A\\ \forall n}}{\Rightarrow} \#\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ endlich $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} = x_{n_0}\ \forall k \Rightarrow$ $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_{n_0} \in A$ $\lightning$. $\square$

4 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition 4.1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (eigentliches oder uneigentliches) Intervall. *Kurve* := **stetige** Abbildung $f = (f_1, \dots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$. f heißt *differenzierbar* (bzw. *stetig differenzierbar*, falls jedes f_k, $1 \le k \le n$, diff.bar (bzw. stetig diff.bar). (f = „Bewegung eines Punktes in $\mathbb{R}^n$“).

Beispiele 4.2. (i) $r > 0$. $t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ *Kreis* (im $\mathbb{R}^2$).

(ii) $a \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $t \mapsto a + vt$, $t \in \mathbb{R}$ *Gerade* (im $\mathbb{R}^n$).

(iii) $r > 0, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $t \mapsto (r \cos t, r \sin t, ct)$ *Schraubenlinie* (im $\mathbb{R}^3$).

(iv) Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist der Graph von φ, $t \mapsto (t, \varphi(t))$, $t \in I$, Kurve im $\mathbb{R}^2$. (**Nicht** jede Kurve im $\mathbb{R}^2$ ist von diesem Typ!)

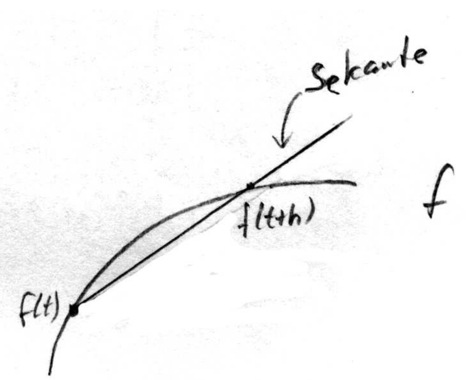
Definition 4.3. Sei $f = (f_1, \dots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ diff.bare Kurve. Für $t \in I$ heißt

$$f'(t) := (f_1'(t), \dots, f_n'(t)) \in \mathbb{R}^n$$

der *Tangentialvektor* (physikalisch: Geschwindigkeitsvektor) der Kurve f in t. Falls $f'(t) \neq 0$, heißt $\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ *Tangenten-Einheitsvektor*.

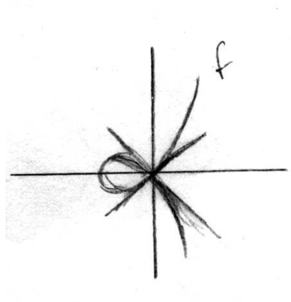
Geometrisch:

$$f'(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$



Bemerkung 4.4. *Kurven sind im Allgemeinen nicht injektiv.*

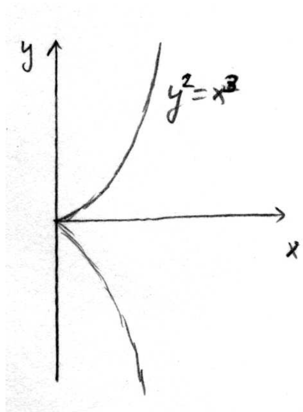
Beispiel. $f(t) := (t^2 - 1, t^3 - t)$, $t \in \mathbb{R}$.



Ü Dann $f(\mathbb{R}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2 + x^3\}$ und $f(1) = f(-1) = (0,0)$. Aber dennoch, da $f'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$, $f'(-1) = (-2,2) \neq (2,2) = f'(1)$.

Definition 4.5. Sei $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetig diff.bare Kurve. f heißt *regulär*, falls $f'(t) \neq 0 \; \forall t \in I$. $t \in I$ heißt *singulär*, falls $f'(t) = 0$.

Beispiel 4.6. $f(t) := (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. *„Neilsche Parabel"*:



Ü Dann $f(\mathbb{R}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y = \pm x^{3/2}\}$, und $f'(t) = (2t, 3t^2)$. $t = 0$ ist der einzige singuläre Punkt.

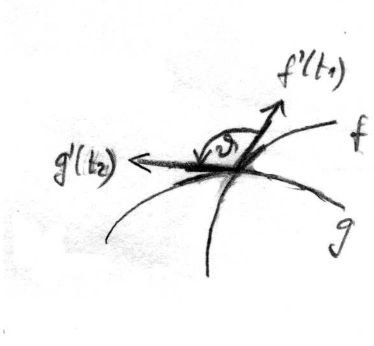
Definition 4.7. Seien $f : I_1 \to \mathbb{R}^n$, $g : I_2 \to \mathbb{R}^n$ zwei **reguläre** Kurven, $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2$ mit

$$f(t_1) = g(t_2) \quad (\textit{Schnittpunkt}).$$

$\vartheta \in [0, 2\pi]$ mit

$$\cos\vartheta = \frac{(f'(t_1), g'(t_2))}{\|f'(t_1)\| \, \|g'(t_2)\|}$$

heißt *Schnittwinkel* von f und g bei t_1 bzw. t_2.



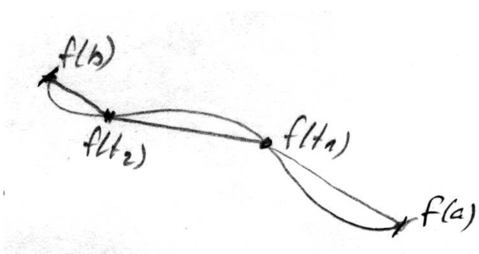
Bogenlänge

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, und $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Unterteilt man $[a,b]$

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$$

und verbindet $f(t_{i-1})$ mit $f(t_i)$ für $1 \leq i \leq k$ geradlinig (d.h.: $t \mapsto f(t_{i-1}) + t(f(t_i) - f(t_{i-1}))$, $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, $1 \leq i \leq k$), so erhält man einen *Polygonzug* mit der *Länge*

$$p_f(t_0, \ldots, t_k) := \sum_{i=1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|.$$



Definition 4.8. Eine Kurve $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *rektifizierbar* mit *Länge* L, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, so dass $\forall$ Unterteilungen

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$$

der Feinheit $\eta < \delta$ ($\eta := \max\limits_{1 \leq i \leq k}(t_i - t_{i-1})$) gilt:

$$|p_f(t_0, \ldots, t_k) - L| \leq \varepsilon.$$

Satz 4.9. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine **stetig diff.bare** Kurve. Dann ist f rektifizierbar mit Länge*

$$L = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt.$$

Bemerkung 4.10. *(i) rektifizierbar $\not\Rightarrow$ stetig diff.bar.*

*(ii) **Nicht** jede (stetige) Kurve ist rektifizierbar.*

Lemma 4.11. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig diff.bar. Dann $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$:*

$$\left\| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right\| \leq \varepsilon \quad \forall t, \tau \in [a,b] \text{ mit } 0 < |t - \tau| \leq \delta.$$

Beweis. **1. Fall**: $n = 1$.
f' stetig, somit gleichmäßig stetig auf $[a,b]$. Also $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$:

$$t, s \in [a,b], \;\; |t - s| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f'(t) - f'(s)| \leq \varepsilon. \tag{$*$}$$

Sei $t, \tau \in [a,b]$, $0 < |t - \tau| \leq \delta$. Dann nach Mittelwertsatz (s. Ana. I, 16.5) $\exists s$ zwischen t und τ mit

$$\frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} = f'(s),$$

also wegen $(*)$

$$\left| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(\tau) \right| = |f'(s) - f'(t)| \leq \varepsilon.$$

2. Fall: $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $f = (f_1, \ldots, f_n)$.
Wissen

$$\left\| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right\| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{f_i(t) - f_i(\tau)}{t - \tau} - f_i'(t) \right|.$$

Somit Behauptung klar nach 1. Fall. ☐

Beweis von 4.9. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Ana. I, 17.17 (Satz „über Riemannsummen"), $\exists \delta_1 > 0$ mit:

$$\left| \int_a^b \|f'(t)\| \, dt - \sum_{i=1}^k \|f'(t_i)\| (t_i - t_{i-1}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

$\forall$ Unterteilungen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ von $[a, b]$ der Feinheit $\eta \leq \delta_1$.
Nach 4.11 $\exists \delta \in]0, \delta_1[$ mit:

$$\eta \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - f'(t_i) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall 1 \leq i \leq k.$$

Somit

$$\eta \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \big| \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| - \|f'(t_i)\|(t_i - t_{i-1}) \big| \leq \frac{t_i - t_{i-1}}{b-a} \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall 1 \leq i \leq k. \tag{2}$$

Falls Feinheit $\eta \leq \delta$, folgt somit aus (1) und (2)

$$\Big| \int_a^b \|f'(t)\| \, dt - \sum_{i=1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \Big| \leq \varepsilon.$$

$\square$

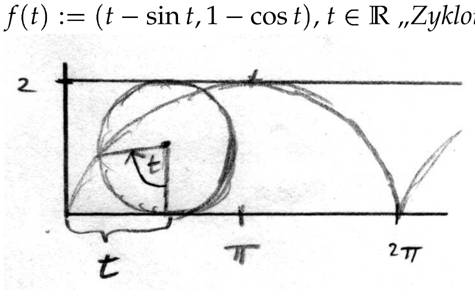
Beispiele 4.12. (i) $\varphi > 0$. „*Kreisbogen*“ in $\mathbb{R}^2$

$$f(t) := (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \varphi].$$

Dann $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$, also $\|f'(t)\| = 1$, somit

$$L = \int_0^{\varphi} \|f'(t)\| \, dt = \varphi.$$

(ii) $f(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$ „*Zykloide*“.



Dann $f'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$, also $\|f'(t)\|^2 = (1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2 = 2(1 - \cos t) = 4 \sin^2 \frac{t}{2}$. Nun $t \in [0, 2\pi]$.
$\Rightarrow L = \int\limits_0^{2\pi} 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| \, dt = 4 \int\limits_0^{\pi} \sin s \, ds = 8.$

Parametertransformationen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Kurve, $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ Intervall und $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ bijektiv, stetig. Dann $g := f \circ \varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ wieder Kurve. *g durch Parametertransformation φ aus f erhalten*. Ist φ **und** φ^{-1} stetig diff.bar, heißt φ *C^1-Parametertransformation*.

Beachte $g([\alpha,\beta]) = f([a,b])$, somit „Kurvenpunkte" gleich, aber verschiedener „Durchlauf".

φ *orientierungstreu*, falls φ isoton.
φ *orientierungsumkehrend*, falls φ antiton.

φ C^1-Parametertransformation $\Rightarrow \varphi'(t) \neq 0 \; \forall t \in [\alpha,\beta]$ (denn: $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}$, somit $(\varphi^{-1})'(\varphi(t)) \cdot \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{somit } \neq 0} = 1$).
Dann: φ orientierungstreu (bzw. -umkehrend) $\Leftrightarrow \varphi'(t) > 0$ (bzw. $\varphi'(t) < 0$) $\forall t \in [\alpha,\beta]$.

a) Tangentialvektoren:
$f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ diff.bare Kurve und $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ C^1-Parametertransformation. Dann $\forall \tau \in [\alpha,\beta]$

$$\begin{aligned}\underbrace{g'(\tau)}_{\substack{\text{Tangentialvektor}\\ \text{an } g \text{ in } \tau}} &= \Big(\big(f_1 \circ \varphi\big)'(\tau), \ldots, \big(f_n \circ \varphi\big)'(\tau) \Big) \\ &= \Big(f_1'\big(\varphi(\tau)\big), \ldots, f_n'\big(\varphi(\tau)\big) \Big) \varphi'(\tau) \\ &= \underbrace{f'\big(\varphi(\tau)\big)}_{\substack{\text{Tangentialvektor}\\ \text{an } f \text{ in } \varphi(\tau)}} \cdot \underbrace{\varphi'(\tau)}_{\substack{\text{skalarer Faktor}\\ \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}}\end{aligned}$$

b) Schnittwinkel:
$f_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^n$, $i = 1,2$, reguläre Kurven. Für $t_i \in [a_i, b_i]$ gelte: $f_1(t_1) = f_2(t_2)$. Sei ϑ der Schnittwinkel von f_1 und f_2 bei t_1 bzw. t_2.
$\varphi_i : [\alpha_i, \beta_i] \to [a_i, b_i]$, $i = 1,2$, C^1-Parametertransformationen und $\tau_i := \varphi_i^{-1}(t_i)$. Dann $g_1(\tau_1) = g_2(\tau_2)$. Sei ϑ' Schnittwinkel von g_1 und g_2 bei τ_1 bzw. τ_2. Dann folgt aus a):
$\vartheta' = \vartheta$, falls φ_1 **und** φ_2 **beide** orientierungstreu oder **beide** orientierungsumkehrend.
$\vartheta' = \pi - \vartheta$, falls von φ_1, φ_2 eine orientierungstreu und die andere orientierungsumkehrend.

c) Bogenlänge:
$f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig diff.bar, $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ C^1-Parametertransformation

und $g := f \circ \varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$. Dann:

$$\int_\alpha^\beta \|g'(\tau)\| \, d\tau = \int_\alpha^\beta \|f'(\varphi(\tau))\| \underbrace{|\varphi'(\tau)|}_{\substack{\pm\varphi'(\tau) \\ + \text{ falls orient.erh.} \\ - \text{ falls orient.umk.}}} d\tau$$

$$\underset{\text{Substitutionsregel!}}{=} \left\{ \begin{array}{c} \int_a^b \|f'(t)\| \, dt \\ -\int_b^a \|f'(t)\| \, dt \end{array} \right\} = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt.$$

Also **gleiche** Bogenlänge!

5 Partielle Ableitungen

Letztes Kapitel: Kurven Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$. **Nun** betrachte umgekehrt Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$. Genauer:
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$.
Definiere *Graph* von f

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \ \ (\subset \mathbb{R}^{n+1}),$$

Niveaumengen von f (= *Höhen„linien“*, falls $n = 2$)

$$N_f(c) := \{x \in U \mid f(x) = c\}, \ c \in \mathbb{R}$$

(legen f eindeutig fest).

Definition 5.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, U offen, und $f : U \to \mathbb{R}$. f heißt in $x \in U$ *partiell differenzierbar* bzgl. i-ten Koordinate, falls

$$\exists D_i f(x) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ (h \neq 0,\, x + he_i \in U)}} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}$$

$$\Big(=: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) =: \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \Big)$$

„*i-te partielle Ableitung* von f in x“,

wobei $e_i := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te}}, 0, \dots, 0)$.

Bemerkung 5.2. *(i) U **offen** nicht nötig. Reicht, dass mindestens eine Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert mit $x + h_n e_i \in U \ \forall n$. Also $U = I_1 \times \cdots \times I_n$ mit I_k abg. Intervall o.k.!*

(ii) Definiere für $(x_1, \dots, x_n) \in U$ fest

$$f_i(\xi) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

$\xi \in \mathbb{R}$, „nahe bei“ x_i. Dann

$$D_i f(x_1, \dots, x_n) = f_i'(x_i).$$

*Also: „i-te partielle Ableitung“ = „gewöhnliche Ableitung bzgl. i-ter Koordinate **mit** übrigen Koordinaten **fest**“.*
*Insbesodere **übertragen sich alle** Rechenregeln für gewöhnliche Ableitungen.*

Definition 5.3. $U \subset \mathbb{R}^n$, U offen. $f : U \to \mathbb{R}$ *partiell differenzierbar*, falls $\exists D_i f(x)\ \forall x \in U, \forall 1 \leq i \leq n$. f *stetig partiell differenzierbar*, falls **zusätzlich alle** partiellen Ableitungen $D_i f : U \to \mathbb{R}$ **stetig** $(1 \leq i \leq n)$.

Beispiele 5.4. (i) $r(x) := \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Niveaumengen: $N_r(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r(x) = c\}$, $c > 0$ = Sphären von Radius c.
$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann $\forall 1 \leq i \leq n$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} \underset{5.2\,\text{(ii)}}{=} \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots x_n^2)^{-1/2} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{r}.$$

(ii) Sei $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ diff.bar. Dann $\forall 1 \leq i \leq n$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big(f \circ r\big)(x) \underset{\substack{5.2\,\text{(ii)} \\ +\,\text{Kettenregel}}}{=} f'(r(x))\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = f'(r(x))\frac{x_i}{r}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

(iii) $n \geq 2$.

$$F(x) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{r(x)^{2n}} & \text{, falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{, falls } x = 0. \end{cases}$$

F ist in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell diff.bar und $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} D_1 f(x) &\underset{5.2\,\text{(ii)}}{=} \frac{x_2 \cdots x_n}{r^{2n}(x)} + x_1 \cdots x_n \frac{\partial}{\partial x_1}(r^{-2n})(x) \\ &\underset{\text{(ii)}}{=} \frac{x_2 \cdots x_n}{r^{2n}(x)} - 2n\frac{x_1^2 x_2 \cdots x_n}{r^{2n+2}(x)} \end{aligned}$$

und $D_2 f(x), \ldots, D_n f(x)$ entsprechend.
Beh. 1. F ist auch in 0 partiell diff.bar.

Beweis. $\frac{\partial F}{\partial x_i}(0) \underset{F(0)=0}{=} \lim\limits_{h \to 0} \underbrace{\frac{F(he_i)}{h}}_{=0,\text{ da } n \geq 2!} = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n.$
Somit F partiell diff.bar auf ganz $\mathbb{R}^n$. □

Aber:
Beh. 2. F **nicht** stetig in 0. ($n \geq 2$!)

Beweis. Definiere $a_k := \left(\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\right) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Dann $a_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$, aber $F(a_k) = \frac{k^{-n}}{(\sqrt{n}/k)^{2n}} = \left(\frac{k}{n}\right)^n \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \infty$. □

Definition 5.5. $U \subset \mathbb{R}^n$, U offen, $f : U \to \mathbb{R}$ partiell diff.bar. Dann heißt der Vektor

$$\operatorname{grad} f(x) := \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\Big) \quad (=: \underbrace{\nabla}_{\text{„Nabla“}} f(x))$$

der *Gradient von* f in x. (Beachte, $x \mapsto \operatorname{grad} f(x)$, $x \in U$, ist Abbildung von U nach $\mathbb{R}^n$, genannt *Gradientenfeld*.)

Beispiele 5.6. (i) $\operatorname{grad} r(x) = \frac{x}{r}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (vgl. 5.4 (i)), wobei $\frac{x}{r}$ ein Vektor vom Betrag 1 in Richtung x ist.
Somit $\operatorname{grad}\big(f \circ r\big)(x) = f'(r(x))\frac{x}{r}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (vgl. 5.4 (ii)), wobei $f \circ r$ rotationssymmetrisch auf $\mathbb{R}^n$ ist!

(ii) $U \subset \mathbb{R}^n$, U offen, $f, g : U \to \mathbb{R}$ partiell diff.bar, dann:

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$$

(denn nach 5.2 (ii) und Produktregel: $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(x) = g(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$).

Definition 5.7. $U \subset \mathbb{R}^n$, U offen. Abbildung $v = (v_1, \dots, v_n) : U \to \mathbb{R}^n$ heißt *Vektorfeld*. v heißt *partiell differenzierbar*, falls alle Komponentenfunktionen $v_1, \dots, v_n$ partiell diff.bar sind. In diesem Fall heißt die Funktion $\operatorname{div} v : U \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\operatorname{div} v(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x)$$

die *Divergenz* von v.

Bemerkung 5.8. *(i) Falls v Vektorfeld, wird also jedem $x \in U$ ein Vektor $v(x)$ in $\mathbb{R}^n$ zugeordnet. Gradientenfeld ist* ***Spezialfall****.*

(ii) Zum Merken: $\operatorname{div} v = \langle \nabla, v \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} v_i$.

(iii) Beide Nabla und Divergenz sind partielle Differentialoperatoren*:*

$f \mapsto \nabla f$	*bildet reellwertige partiell diff.bare Funktionen auf Vektorfelder ab,*
$v \mapsto \operatorname{div} v$	*bildet partiell diff.bare Vektorfelder auf reellwertige Funktionen ab.*

(iv) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, U offen, $f : U \to \mathbb{R}$ partiell diff.bar, $v = (v_1, \dots, v_n) : U \to \mathbb{R}^n$ partiell diff.bares Vektorfeld. Dann

$$\operatorname{div}(fv) = \langle \operatorname{grad} f, v \rangle + f \operatorname{div} v,$$

denn wegen 5.2 (ii) und Produktregel

$$D_i(fv_i) = v_i D_i f + f D_i v_i, \quad 1 \le i \le n,$$

dann summiere über i.

Beispiel 5.9. Betrachte Vektorfeld $F(x) := \frac{x}{r(x)}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Da $\operatorname{div} x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = n$ und $\langle x, x \rangle = r^2(x)$, folgt mit 5.6 (i) und 5.8 (iv)

$$\begin{aligned}\operatorname{div} F(x) &\underset{5.8\,(\text{iv})}{=} \left\langle \operatorname{grad} \frac{1}{r}, x \right\rangle + \frac{1}{r} \operatorname{div} x \\ &\underset{5.6\,(\text{i})}{=} \left\langle -\frac{x}{r^3(x)}, x \right\rangle + \frac{n}{r(x)} = \frac{n-1}{r(x)}.\end{aligned}$$

Höhere Ableitungen

$U \subset \mathbb{R}^n$, U offen, $f : U \to \mathbb{R}$ partiell diff.bar. Ist $D_i f$ wieder partiell diff.bar, kann man *partielle Ableitungen zweiter Ordnung* $D_j D_i f$ bilden. Genauer (induktiv):

Definition 5.10. $f : U \to \mathbb{R}$ heißt $(k+1)$*-mal partiell differenzierbar*, wenn f k-mal diff.bar und **alle** *partiellen Ableitungen k-ter Ordnung* $D_{i_k} \cdots D_{i_2} D_{i_1} f : U \to \mathbb{R}$, $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ partiell diff.bar. f heißt *k-mal stetig partiell differenzierbar*, falls k-mal partiell diff.bar und **alle** partiellen Ableitungen der Ordnung $\le k$ stetig.
Schreibweise: $D_{i_k} \cdots D_{i_1} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}$.

Satz 5.11. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, U offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal* ***stetig*** *(reicht: „in a“) diff.bar. Dann $\forall a \in U, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$*

$$D_j D_i f(a) = D_i D_j f(a).$$

Beweis. Œ: $n = 2$, $i = 1$, $j = 2$ ($\boxed{\text{ü}}$!). Schreibe: (x, y) statt (x_1, x_2), $a = (a_1, a_2)$!

Sei $\delta > 0$ mit $\underbrace{]a_1 - \delta, a_1 + \delta[\times]a_2 - \delta, a_2 + \delta[}_{} \subset U$.

Betrachte für $(x, y) \in$

$$\underbrace{f(x,y)-f(x,a_2)}_{=:F_y(x)} \quad \Rightarrow \quad -(\underbrace{f(a_1,y)-f(a_1,a_2)}_{F_y(a_1)}) \tag{1}$$

$$\underset{\substack{\text{MWS}\\ \text{Ana. I. 16.5.}}}{=} F_y'(\xi_1)(x-a_1) \quad = (D_1f(\xi_1,y)-D_1f(\xi_1,a_2))\cdot(x-a_1)$$

für ein $\xi_1 \in]a_1-\delta, a_1+\delta[$

$$\underset{\substack{\text{MWS}\\ \text{Ana. I. 16.5.}}}{=} D_1D_2f(\xi_1,\eta_1)\cdot(x-a_1)\cdot(y-a_2)$$

für ein $\eta_1 \in]a_2-\delta, a_2+\delta[$

Vertauschung der Rollen von erster und zweiter Koordinate ergibt: $\exists(\xi_2,\eta_2) \in]a_1-\delta, a_1+\delta[\times]a_2-\delta, a_2+\delta[$ mit

$$\begin{aligned} &f(x,y)-f(a_1,y)-(f(x,a_2)-f(a_1,a_2)) \\ &\quad = D_1D_2f(\xi_2,\eta_2)\cdot(x-a_1)\cdot(y-a_2) \end{aligned} \tag{2}$$

Da linke Seiten von (1) und (2) gleich, folgt für $x \neq a_1, y \neq a_2$

$$D_2D_1f(\xi_1,\eta_1) = D_1D_2f(\xi_2,\eta_2).$$

Aber (ξ_i,η_i), $i=1,2$ hängen von (x,y) ab, und $(\xi_i,\eta_i)\to a$, falls $(x,y)\to a$. Da **nach Voraussetzung** D_2D_1f **und** D_1D_2f **stetig in** a, folgt

$$D_2D_1f(a) = D_1D_2f(a).$$

□

Korollar 5.12. *Sei $U\subset\mathbb{R}^n$, offen, $f: U\to\mathbb{R}$ k-mal stetig diff.bar. Dann*

$$D_{i_k}\cdots D_{i_1}f = D_{i_{\pi(k)}}\cdots D_{i_{\pi(1)}}f$$

für jede Permutation π von $\{1,\dots,k\}$.

Beweis. Da jedes π aus Vertauschung benachbarter Glieder hervorgeht, folgt Behauptung aus 5.11 mit Induktion. □

Beispiel 5.13. $U\subset\mathbb{R}^3$, offen, $v: U\to\mathbb{R}^3$ partiell diff.bares Vektorfeld. Definiere *Rotation* von v durch

$$\operatorname{rot} v := \Big(\frac{\partial}{\partial x_2}v_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}v_2, \frac{\partial}{\partial x_3}v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}v_3, \frac{\partial}{\partial x_1}v_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}v_1\Big) \quad (=\nabla\times v).$$

Spezialfall: $v := \operatorname{grad} f$ mit f zweimal stetig diff.bar $\underset{5.12}{\Rightarrow}$ $\operatorname{rot} v = \operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$. $(\nabla\times\nabla f = 0.)$
Also: Damit stetig diff.bares Vektorfeld $v: U\to\mathbb{R}^3$ Gradient einer Funktion $f: U\to\mathbb{R}$, muss **notwendig** $\operatorname{rot} v = 0$ gelten!

Laplace Operator

$U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal (stetig) partiell diff.bar. Setze

$$\Delta f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad (= \operatorname{div} \operatorname{grad} f \ ).$$

$\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ heißt *Laplace-Operator*. **Wichtig!**

Potentialgleichung:

$$\Delta f = 0.$$

Solche f heißen *harmonisch*.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall („Zeiten"). Betrachte $U \times I \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Eine zweimal (stetig) partiell diff.bare Funktion $f : U \times I \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$ (mit $(x,t) = (x_1, \ldots, x_n, t)$) heißt Lösung der Wellengleichung, falls

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (\textit{Wellengleichung}),$$

und Lösung der Wärmeleitungsgleichung, falls

$$\Delta f - \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (\textit{Wärmeleitungsgleichung}),$$

$c, k \in]0, \infty[$, c = „Wellen-Ausbreitungsgeschwindigkeit", k = „Temperaturleitfähigkeit".

Beispiele 5.14. (i) $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff.bar, $r(x) := \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$.
$\Delta(f \circ r) = ?$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ($f \circ r$ ist rotationssymmetrisch).
Nach 5.6 (i)

$$\operatorname{grad}(f \circ r) = f' \circ r \cdot \frac{x}{r}. \tag{$*$}$$

Somit

$$\begin{aligned}
\Delta(f \circ r) &= \operatorname{div} \operatorname{grad}(f \circ r) \\
&\underset{(*)\ \&\ \text{Prod.regel}}{=} \left\langle \operatorname{grad}(f' \circ r), \frac{x}{r} \right\rangle + f' \circ r \cdot \underbrace{\operatorname{div} \frac{x}{r}}_{\underset{5.9}{=} \frac{n-1}{r}} \\
&\underset{(*)}{=} \left\langle f'' \circ r \cdot \frac{x}{r}, \frac{x}{r} \right\rangle + f' \circ r \cdot \frac{n-1}{r} \\
&= f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r).
\end{aligned}$$

(ii) Sei $F(x,t) := \frac{\cos(r-ct)}{r}$, $(x,t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, $r(x) := \|x\|$.
Beh.

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)F(x,t) = 0.$$

Beweis.

$$\Delta F(x,t) \underset{\text{(i)}}{=} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\cos(r-ct)}{r}.$$

Aber

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\frac{\cos(r-ct)}{r} &= -\frac{\sin(r-ct)}{r} - \frac{\cos(r-ct)}{r^2},\\
\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{\cos(r-ct)}{r} &= -\frac{\cos(r-ct)}{r} + 2\frac{\sin(r-ct)}{r^2} + 2\frac{\cos(r-ct)}{r^3},
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\Delta F(x,t) &= -\frac{\cos(r-ct)}{r}\\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\cos(r-ct)}{r}.
\end{aligned}$$

□

6 Totale Differenzierbarkeit

Definition 6.1. $U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$. f in $x \in U$ (*total*) *differenzierbar*, falls $\exists$ **lineare** Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $\exists \delta > 0$ mit

$$f(x+\xi) = f(x) + A\xi + \varphi(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|\xi\| < \delta \tag{$*$}$$

und $\varphi : \mathbb{R}^n \supset B(0,\delta) \to \mathbb{R}^m$ mit

$$\lim_{\substack{\xi \to 0 \\ \xi \neq 0}} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0. \tag{$**$}$$

($A = A_x$ und $\varphi = \varphi_x$ hängen **natürlich** von x ab!)
A heißt die *Ableitung* von f in x.

Bemerkung 6.2. *(i) Für $n = m = 1$ ist 6.1 gerade die gewöhnliche Diff.barkeit auf $\mathbb{R}^1$ nach Ana. I, 15.6.*

(ii) $(*)$ bedeutet, f lässt sich lokal um x „bis zur ersten Ordnung" durch eine lineare Abbildung A (die i.A. von x abhängt $A = A(x)$) approximieren.

(iii) Wir werden im weiteren A immer mit der Matrix identifizieren, die A bzgl. der kanonischen Basen in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ darstellt, also $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$. Sei $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)^T$. Dann $\forall \xi \in B(0,\delta)$

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad f_i(x+\xi) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + \varphi_i(\xi)\ , \quad 1 \le i \le m.$$

Somit insbesondere

$$f \text{ diff.bar in } x \quad \Leftrightarrow \quad f_i : U \to \mathbb{R} \text{ diff.bar in } x \quad \forall 1 \le i \le m.$$

(iv) Statt

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{\xi \to 0 \\ \xi \neq 0}} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0 \tag{$**$}$$

symbolische *Schreibweise: $\varphi(\xi) = o(\|\xi\|)$.*

Beispiel 6.3. Sei $C = (c_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix und

$$f(x) := \langle x, Cx \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

die zugehörige quadratische Form $f : R^n \to \mathbb{R}$. Für $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} f(x+\xi) &= \langle x+\xi, Cx + C\xi \rangle \\ &= \langle x, Cx \rangle + \langle \xi, Cx \rangle + \langle x, C\xi \rangle + \langle \xi, C\xi \rangle \\ &= \langle x, Cx \rangle + 2\langle Cx, \xi \rangle + \langle \xi, C\xi \rangle \\ &= f(x) + \langle A, \xi \rangle + \varphi(\xi) \end{aligned}$$

mit $A := 2Cx$, $\varphi(\xi) := \langle \xi, C\xi \rangle$. Da

$$|\varphi(\xi)| \le \|\xi\| \, \|C\xi\| \le \|C\| \, \|\xi\|^2,$$

gilt

$$\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} \xrightarrow[\xi \to 0]{} 0.$$

$\Rrightarrow$ f diff.bar in x.

Satz 6.4. *$U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ diff.bar in $x \in U$, also*

$$f(x+\xi) = f(x) + A\xi + o(\|\xi\|)$$

mit $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$. Dann:

(i) f stetig in x.

(ii) Alle $f_i : U \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, sind partiell diff.bar in x mit

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = A \\ =:&(Df)(x) =: J_f(x) \end{aligned}$$

„Differential-“ *oder* „Funktional-“ *oder* „Jacobi-Matrix“ *von f in x.*

Insbesondere A in Definition 6.1 ***eindeutig*** *durch f bestimmt.*

Beweis. (i):

$$\lim_{\xi \to 0} f(x+\xi) = f(x) + \underbrace{\lim_{\xi \to 0} A\xi}_{=0} + \underbrace{\lim_{\xi \to 0} \varphi(\xi)}_{=0} = f(x).$$

(ii): Sei $1 \leq i \leq m$. Dann $\forall 1 \leq j \leq n$, $h \in \mathbb{R}$ (klein)

$$f_i(x + he_j) = f_i(x) + ha_{ij} + \varphi_i(he_j)$$

also

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(x + he_j) - f_i(x)}{h} = a_{ij} + \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\varphi_i(he_j)}{h}}_{\leq \frac{\|\varphi(he_j)\|}{|h|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0} = a_{ij}.$$

□

Satz 6.5. *$U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f : U \to \mathbb{R}$ **partiell** diff.bar mit **alle** $D_i f$, $1 \leq i \leq n$, sind **stetig** in $x \in U$. Dann f **total** diff.bar in x.*

Beweis. Sei $\delta > 0$ mit $B(x, \delta) \subset U$. Sei $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in B(0, \delta)$. Definiere

$$z^{(i)} := x + \sum_{\nu=1}^{i} \xi_\nu e_\nu \,, \quad i = 0, \dots, n.$$

Dann $z^{(0)} = x$, $z^n = x + \xi$ und $z^{(i)} - z^{(i-1)} = \xi_i e_i$. Nach MWS (Ana. I, 16.5)

$$f(z^{(i)}) - f(z^{(i-1)}) = D_i f(y^{(i)}) \xi_i$$

mit $y^{(i)} = z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i e_i$ für ein $\theta_i \in [0, 1]$. Somit

$$\begin{aligned} f(x + \xi) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} f(z^{(i)}) - f(z^{(i-1)}) &= \sum_{i=1}^{n} D_i f(y^{(i)}) \xi_i \\ = f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} D_i f(x)}_{=:A} \xi_i &+ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (D_i f(y^{(i)}) - D_i f(x)) \xi_i}_{=:\varphi(\xi)} \end{aligned}$$

Dann

$$\frac{|\varphi(\xi)|}{\|\xi\|} \leq \sum_{i=1}^{n} |D_i f(y^{(i)}) - D_i f(x)| \xrightarrow[\xi \to 0]{} 0,$$

da $D_i f$ stetig in x $\forall 1 \leq i \leq n$ und $y^{(i)} = x + \sum_{\nu=1}^{i-1} \xi_\nu e_\nu + \theta_i \xi_i e_i$. □

Korollar 6.6. *$U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig partiell diff.bar $\Rightarrow$ f stetig.*

Beweis. 6.4 und 6.5. □

Bemerkung 6.7. *Somit: stetig partiell diff.bar ⇒ (total) diff.bar ⇒* $\begin{cases} \text{partiell diff.bar,} \\ \text{stetig.} \end{cases}$

Satz 6.8 (Kettenregel). *$U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $g : U \to \mathbb{R}^m$, $f : V \to \mathbb{R}^k$ mit $g(U) \subset V$, g in $x \in U$ diff.bar, f in $y := g(x)$ diff.bar. Dann $f \circ g : U \to \mathbb{R}^k$ diff.bar in x und*

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x).$$

Beweis. Setze $A := Dg(x)$, $B := Df(y)$.
Z.z.: $D(f \circ g)(x) = BA$.
Es gilt

$$g(x + \xi) = g(x) + A\xi + \varphi(\xi), \tag{1}$$

$$f(y + \eta) = f(y) + B\eta + \psi(\eta) \tag{2}$$

mit $\varphi(\xi) = o(\|\xi\|)$, $\psi(\eta) = o(\|\eta\|)$ („kleine“ ξ, η). Wähle speziell

$$\eta := g(x + \xi) - g(x) = A\xi + \varphi(\xi), \tag{3}$$

(„klein“, falls ξ „klein“). Somit

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x + \xi) = f(g(x + \xi)) &\underset{(3)}{=} f(g(x) + \eta) \\ &\underset{(2),(3)}{=} f(g(x)) + B(A\xi + \varphi(\xi)) + \psi(A\xi + \varphi(\xi)) \\ &= (f \circ g)(x) + BA\xi + \underbrace{B\varphi(\xi) + \psi(A\xi + \varphi(\xi))}_{=:\chi(\xi)}. \end{aligned}$$

Wegen $\psi(\eta) = o(\|\eta\|)$ gilt

$$\psi(\eta) = \|\eta\|\psi_1(\eta) \quad \text{mit} \quad \lim_{\eta \to 0} \psi_1(\eta) = 0, \quad \psi_1(0) := 0.$$

Somit

$$\begin{aligned} \frac{\|\chi(\xi)\|}{\|\xi\|} &\leq \|B\| \underbrace{\frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|}}_{\underset{\xi \to 0}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\|\psi_1(A\xi + \varphi(\xi))\|}_{\underset{\xi \to 0}{\longrightarrow} 0} \underbrace{\frac{\|A\xi + \varphi(\xi)\|}{\|\xi\|}}_{\leq \|A\| + \underbrace{\frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|}}_{\underset{\xi \to 0}{\longrightarrow} 0}} \\ &\underset{\xi \to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

□

Korollar 6.9. *$U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $V \subset \mathbb{R}^m$, offen, $f : V \to \mathbb{R}$ diff.bar, $g = (g_1, \ldots, g_m) : U \to \mathbb{R}^m$ diff.bar mit $g(U) \subset V$. Dann $h =: f \circ g : U \to \mathbb{R}$ diff.bar und $\forall 1 \leq i \leq n$*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(g_1(x), \ldots, g_m(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n).$$

Beweis. Es gilt:

$$Dh(x) = \Big(\frac{\partial h}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n}(x)\Big),$$
$$Df(g(x)) = \Big(\frac{\partial f}{\partial y_1}(g(x)), \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_m}(g(x))\Big),$$
$$Dg(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Somit Behauptung klar nach 6.8, da danach

$$Dh(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x).$$

□

Definition 6.10. $U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$D_v f(x) := \frac{d}{dt} f(x + tv)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

Richtungsableitung von f in x bzgl. v (bzw. *in Richtung v*, falls $\|v\| = 1$), falls Limes existiert.
Beachte: $D_{e_i} f = D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Satz 6.11. *$U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f : U \to \mathbb{R}$ (total) diff.bar. Dann $\forall x \in U, \forall v \in \mathbb{R}^n$*

$$D_v f(x) = \langle v, \operatorname{grad} f(x) \rangle.$$

Beweis. Definiere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ durch

$$g(t) := x + tv = (x_1 + tv_1, \ldots, x_n + tv_n).$$

Für $\varepsilon > 0$ klein gilt $g(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset U$, also ist

$$h := f \circ g :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$$

definiert. Somit

$$\begin{aligned} D_v f(x) &= \frac{d}{dt} f(x+tv)\Big|_{t=0} = \frac{dh}{dt}(0) \\ &\underset{6.9}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underbrace{g(0)}_{=x}) \underbrace{\frac{dg_i}{dt}(0)}_{=v_i} = \langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.12. *(i) Ist* $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$*, so gilt für Winkel* ϑ *zwischen* v *und* $\operatorname{grad} f(x)$

$$D_v f(x) = \cos\vartheta \|\operatorname{grad} f(x)\| \, \|v\|.$$

Betrachte nun nur $v \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\|v\| = 1$.
Dann $D_v f(x)$ *maximal, falls* v *gleiche Richtung wie* $\operatorname{grad} f(x)$*. Also gibt* $\operatorname{grad} f(x)$ *die „Richtung stärksten Anstiegs" an.*

(ii) Beachte: Definition 6.1 überträgt sich direkt auf Abbildungen $f : U \to E_2$ *mit* E_2 *normierter Raum und* U *offene Teilmenge eines normierten Raumes* E_1*, wobei* A ***zusätzlich*** *als* ***stetig*** *vorausgesetzt wird. In diesem Fall heißt totale Diff.barkeit auch* Fréchet-Differenzierbarkeit*. Beachte weiterhin, dass auch Richtungsableitungen auf normierten Räumen analog definiert werden können, d.h.: für* $U \subset E_1$*,* $f : U \to \mathbb{R}$*,* $x \in U$*,* $v \in E_1$*,*

$$D_v f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}, \quad \text{(falls Limes existiert).}$$

$f : U \to \mathbb{R}$ *heißt* Gâteaux-differenzierbar *in* $x \in U$*, falls* $D_v f(x)$ *existiert* $\forall v \in E_1$ ***und*** $v \mapsto D_v f(x)$ *ist* ***linear und stetig*** *von* E_1 *nach* $\mathbb{R}$*. Für* $E_1 = \mathbb{R}^n$ *sagt 6.11:*

Fréchet-diff.bar $\Rightarrow$ *Gâteaux-diff.bar.*

Aber Umkehrung (sogar für $E_1 = \mathbb{R}^n$ *!)* ***falsch****. Beispiel dazu in den Übungen. Dort:* $E_1 = \mathbb{R}^2$*,* $x = (0,0)$*,* $D_v f((0,0)) = 0 \; \forall v \in \mathbb{R}^2$ *und* f *nicht stetig in* $(0,0)$*.* $(**)$ *in 6.1 muss wegen 6.4 (i) verletzt sein.*

Mittelwertsatz („integrale Form")

Sei $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 \leq t_1$ und $t \mapsto A(t)$ eine Abbildung von $[t_0, t_1]$ nach $M(m \times n, \mathbb{R})$ (matrixwertig!), also $A(t) = (a_{ij}(t))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ mit $a_{ij} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$.

Definiere

$$\int_{t_0}^{t_1} A(t)\, dt = \Big(\underbrace{\int_{t_0}^{t_1} a_{ij}(t)\, dt}_{\text{falls diese Riemann-Integrale existieren}} \Big)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}.$$

Satz 6.13. *$U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f = (f_1, \dots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ stetig partiell diff.bar, $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\{x + t\xi \mid 0 \le t \le 1\} \subset U$. Dann*

$$f(x+\xi) - f(\xi) = \Big(\int_0^1 Df(x+t\xi)\, dt \Big) \cdot \xi.$$

Beweis. Fixiere $i \in \{1, \dots, m\}$. Definiere

$$g_i(t) := f_i(x + t\xi), \quad t \in [0,1].$$

Dann

$$f_i(x+\xi) - f_i(x) = g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 g_i'(t)\, dt \underset{6.9}{=} \int_0^1 \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+t\xi)\xi_j \Big)\, dt$$

$$= \sum_{j=1}^n \Big(\int_0^1 \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+t\xi)}_{\left(Df(x+t\xi)\right)_{ij}}\, dt \Big) \xi_j.$$

□

Korollar 6.14. *In der Situation von 6.13 gilt für*

$$M := \sup_{0\le t\le 1} \|Df(x+t\xi)\|,$$

dass

$$\|f(x+\xi) - f(x)\| \le M\|\xi\|.$$

Beweis.

$$\|f(x+\xi) - f(x)\| \underset{6.13}{=} \Big\| \int_0^1 Df(x+t\xi)\xi\, dt \Big\| \underset{\substack{6.15\\ \text{unten}}}{\le} \int_0^1 \underbrace{\|Df(x+t\xi)\|}_{\le M} \|\xi\|\, dt$$

$$\le M\|\xi\|.$$

□

Hilfssatz 6.15. $v : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ *stetig. Dann*

$$\Big\| \int_a^b v(t)\ dt \Big\| \leq \int_a^b \|v(t)\|\ dt.$$

Beweis. Sei

$$u := \int_a^b v(t)\ dt \quad (\in \mathbb{R}^m\ \ !\,), \quad \text{Œ}: \quad u \neq 0.$$

Dann

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \Big\langle \int_a^b v(t)\ dt, u \Big\rangle \underset{\boxed{\text{Ü}}}{=} \int_a^b \langle v(t), u\rangle\ dt$$
$$\leq \int_a^b \|v(t)\|\ \|u\|\ dt = \|u\| \int_a^b \|v(t)\|\ dt.$$

Somit (da $\|u\| \neq 0$)

$$\Big\| \int_a^b v(t)\ dt \Big\| = \|u\| \leq \int_a^b \|v(t)\|\ dt.$$

□

7 Taylor-Formel. Lokale Extrema

Bezeichnungen. Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$
$$\alpha! := \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!$$

Für f $|\alpha|$-mal partiell diff.bar

$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

wobei

$$D_i^{\alpha_i} := \underbrace{D_i \cdots D_i}_{\alpha_i\text{-mal}}.$$

Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Lemma 7.1. *$U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f : U \to \mathbb{R}$ k-mal **stetig** (partiell, auf $\mathbb{R}^n$ „egal" !) diff.bar, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\{x + t\xi \mid 0 \le t \le 1\} \subset U$. Dann*

$$g(t) := f(x + t\xi)\ , \quad t \in [0,1],$$

k-mal stetig diff.bar, und

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = k! \underbrace{\sum_{|\alpha|=k}}_{\text{„Summation über \textbf{alle} } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |\alpha| = k\text{"}} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x + t\xi)\xi^\alpha.$$

Beweis. **Beh.** $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(x + t\xi)\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}.$$

Beweis. Induktion über k:
$k = 1$:

$$\frac{dg}{dt}(t) \underset{6.9}{=} \sum_{i=1}^{n} D_i f(x + t\xi)\xi_i.$$

$k - 1 \mapsto k$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^k g}{dt^k}(t) &\underset{\substack{\text{Ind.}\\ \text{Ann.}}}{=} \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}=1}^{n} D_{i_{k-1}} \cdots D_{i_1} f(x + t\xi)\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{k-1}}\Big) \\
&\underset{6.9}{=} \sum_{j=1}^{n} D_j \Big(\sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}=1}^{n} D_{i_{k-1}} \cdots D_{i_1} f(x + t\xi)\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{k-1}}\Big)\xi_j \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(x + t\xi)\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}.
\end{aligned}$$

□

Betrachte festes k-Tupel $(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$. Sei $\alpha_\nu := \#\{l \in \{1, \ldots, k\} \mid i_l = \nu\}$, $1 \le \nu \le n$. Dann nach 5.12

$$D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(x + tk)\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k} = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f(x + t\xi)\xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}.$$

Da es aber für gegebenes $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = k$ genau $\frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$ k-Tupel $(i_1, \ldots, i_k)$ gibt mit $\alpha_\nu = \#\{l \in \{1, \ldots, k\} \mid i_l = \nu\}$ $\forall \nu \in \{1, \ldots, n\}$ (vgl. Übungen), folgt aus Beh.

$$\begin{aligned}
\frac{d^k g}{dt^k}(t) &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f(x + tk)\xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n} \\
&= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x + tk)\xi^\alpha.
\end{aligned}$$

□

Satz 7.2 (Taylorsche Formel). *$U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\{x + t\xi \mid t \in [0, 1]\} \subset U$, $f : U \to \mathbb{R}$ $(k + 1)$-mal stetig diff.bar. Dann $\exists \theta \in [0, 1]$ mit*

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(x + \theta\xi)}{\alpha!}\xi^\alpha.$$

Beweis. Sei

$$g(t) := f(x + t\xi), \quad t \in [0, 1].$$

Dann nach 7.1 g $(k+1)$-mal stetig diff.bar und nach Taylor-Formel Ana. I. $\exists\theta \in [0,1]$ mit

$$\underbrace{g(1)}_{\substack{\| \\ f(x)}} = \sum_{m=0}^{k} \underbrace{\frac{g^{(m)}(0)}{m!}}_{\substack{\| \ 7.1 \\ \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x)\xi^\alpha}} + \underbrace{\frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}}_{\substack{\| \ 7.1 \\ \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x+\theta\xi)\xi^\alpha}}.$$

□

Korollar 7.3. *$U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $x \in U$, $\delta > 0$ mit $B(x,\delta) \subset U$, $f : U \to \mathbb{R}$ k-mal* ***stetig*** *diff.bar. Dann $\forall \xi \in B(0,\delta)$*

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\le k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + \varphi(\xi)$$

mit $\varphi(0) = 0$ und $\lim\limits_{\substack{\xi\to 0 \\ \xi\neq 0}} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^k} = 0$. (Kurz: $\varphi(\xi) = o(\|\xi\|^k)$).

Beweis. Œ: $k \ge 1$. Nach 7.2 $\exists\theta = \theta(\xi) \in [0,1]$ mit Ü

$$\begin{aligned} f(x+\xi) &= \sum_{|\alpha|\le k-1} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(x+\theta\xi)}{\alpha!}\xi^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|\le k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + \underbrace{\sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(x+\theta\xi) - D^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha}_{=:\varphi(\xi)}. \end{aligned}$$

Aber $\varphi(0) = 0$ und

$$\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^k} \le \sum_{|\alpha|=k} \underbrace{\frac{|D^\alpha f(x+\theta\xi) - D^\alpha f(x)|}{\alpha!}}_{\substack{\xrightarrow[\xi\to 0]{} 0, \\ \text{da } f\ k\text{-mal} \\ \textbf{stetig} \text{ diff.bar und} \\ \theta=\theta(\xi)\in[0,1]}} \underbrace{\frac{|\xi|^\alpha}{\|\xi\|^k}}_{= \underbrace{\frac{|\xi_1|^{\alpha_1}}{\|\xi\|^{\alpha_1}} \cdots \frac{|\xi_n|^{\alpha_n}}{\|\xi\|^{\alpha_n}}}_{\le 1}}$$

□

Bemerkung 7.4. *Sei*

$$P_m(\xi) := \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha \quad \left(\substack{\textit{ist homogenes Polynom vom} \\ \textit{Grad } m \textit{ in } \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)}\right).$$

Dann nach 7.3

$$f(x+\xi) = \sum_{m=0}^{k} P_m(\xi) + \varphi(\xi) \quad \textit{mit} \quad \varphi(\xi) = o(\|\xi\|^k).$$

$$m = 0 \quad : \quad P_0(\xi) = f(x),$$
$$m = 1 \quad : \quad P_1(\xi) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(x)\xi_j = \langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle.$$

Somit nach 7.3, falls f einmal stetig diff.bar:

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle + o(\|\xi\|).$$

$$m = 2 \quad : \quad P_2(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} D_i^2 f(x)\xi_i^2 + \underbrace{\sum_{i<j} D_i D_j f(x)\xi_i\xi_j}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} D_i D_j f(x)\xi_i\xi_j \quad \textit{nach 5.11}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} D_i D_j f(x)\xi_i\xi_j = \underset{\textit{zur Matrix } \left(\frac{1}{2} D_i D_j f(x)\right)_{ij}}{\textit{quadratische Form}}$$

Definition 7.5. $U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff.bar, $x \in U$. Dann heißt

$$\left(\operatorname{Hess} f\right)(x) := \left(D_i D_j f(x)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \quad \text{(symmetrisch! nach 5.11)}$$

die *Hessesche Matrix von f in x.*

Korollar 7.6. *$U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff.bar, $x \in U$. Dann*

$$f(x+\xi) = f(x) + \left\langle \operatorname{grad} f(x), \xi \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \xi, \left(\operatorname{Hess} f\right)(x)\xi \right\rangle + o(\|\xi\|^2).$$

Beweis. 7.3 und 7.4. □

Lokale Extrema

Definition 7.7. $U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f : U \to \mathbb{R}$. $x \in U$ heißt *lokales Maximum* (bzw. *lokales Minimum*) von f, falls $\exists$ Umgebung $V \subset U$ von x mit

$$f(x) \geq f(y) \quad \left(\text{ bzw. } f(x) \leq f(y) \right) \quad \forall y \in V.$$

Falls zusätzlich: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \ \forall x, y \in V$, so heißt x *isoliertes* lokales Maximum bzw. Minimum. *Lokales Extremum* ist lokales Minimum oder Maximum.

Satz 7.8. *$U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f : U \to \mathbb{R}$ partiell diff.bar, $x \in U$. Dann:*

$$x \text{ lokales Extremum von } f \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x) = 0.$$

Beweis. Für $i = 1, \ldots, n$ definiere

$$g_i(t) := f(x + te_i)$$

für $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ mit $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\{x + te_i \mid 0 \leq t \leq \varepsilon\} \subset U \ \forall 1 \leq i \leq n$. Hat f in x lokales Extremum, so hat **jedes** g_i Extremum in 0, also nach Ana. I

$$g_i'(0) = 0.$$

Da $g_i'(0) = D_i f(x)$, $1 \leq i \leq n$, folgt

$$\operatorname{grad} f(x) = \big(D_1 f(x), \ldots, D_n f(x)\big) = 0.$$

□

Ziel: Hinreichendes Kriterium für lokales Extremum (bzw. Minimum / Maximum). Müssen dazu Hess f näher betrachten!

Definition 7.9. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch.

(i) *A positiv definit*, falls $\langle A\xi, \xi \rangle > 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(ii) *A positiv semidefinit*, falls $\langle A\xi, \xi \rangle \geq 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

(iii) *A negativ definit* (bzw. *negativ semidefinit*), falls $-A$ positiv definit (bzw. positiv semidefinit).

(iv) *A indefinit*, falls $\exists \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle \xi, A\xi \rangle > 0$ und $\langle \eta, A\eta \rangle < 0$.

Bemerkung 7.10. *Bekanntlich ist jede symmetrische $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ diagonalisierbar. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A. Dann:* Ü

$$\begin{aligned}
A \ \text{pos. def.} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda_i > 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n, \\
A \ \text{pos. semidef.} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n, \\
A \ \text{neg. def.} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda_i < 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n, \\
A \ \text{neg. semidef.} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda_i \leq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n, \\
A \ \text{indef.} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists i, j \in \{1, \ldots, n\} \ \text{mit} \ \lambda_i > 0 > \lambda_j.
\end{aligned}$$

Für $n \geq 3$ ziemlich schwierig λ_i's zu berechnen. Daher folgendes Kriterium von Hurwitz nützlich:

Satz 7.11. *Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dann:*

$$A \;\; \textit{pos. def.} \quad \Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Beweis. Vgl. [Fis00, 5.7.7]. □

Satz 7.12. *$U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff.bar, $x \in U$ mit* $\operatorname{grad} f(x) = 0$. *Dann:*

(i) $\big(\operatorname{Hess} f\big)(x)$ *pos. def. $\Rightarrow$ x isoliertes Minimum.*

(ii) $\big(\operatorname{Hess} f\big)(x)$ *neg. def. $\Rightarrow$ x isoliertes Maximum.*

(iii) $\big(\operatorname{Hess} f\big)(x)$ *indef. $\Rightarrow$ x kein lokales Extremum.*

Beweis. Setze $A := \big(\operatorname{Hess} f\big)(x)$. Nach 7.6

$$f(x+\xi) = f(x) + \frac{1}{2}\langle \xi, A\xi \rangle + \varphi(\xi) \quad \text{mit} \quad \varphi(\xi) = o(\|\xi\|^2). \tag{1}$$

Somit $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0$:

$$|\varphi(\xi)| \le \varepsilon \|\xi\|^2 \quad \forall \xi \in B(0, \delta_\varepsilon). \tag{2}$$

(i): Sei $A = \big(\operatorname{Hess} f\big)(x)$ pos. def. Sei

$$S := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \|\xi\| = 1\} \quad (\, = \partial B(0,1)\,).$$

Da S kompakt und $\xi \mapsto \langle \xi, A\xi \rangle$ stetig, $\exists \xi_0 \in S$:

$$\alpha := \inf\{\langle \xi, A\xi \rangle \mid \xi \in S\} = \langle \xi_0, A\xi_0 \rangle > 0.$$

Dann $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\langle \xi, A\xi \rangle = \|\xi\|^2 \Big\langle \underbrace{\frac{\xi}{\|\xi\|}}_{\in S}, A \underbrace{\frac{\xi}{\|\xi\|}}_{\in S} \Big\rangle \ge \alpha \|\xi\|^2.$$

Für $\xi = 0$ ist das natürlich auch richtig, also folgt mit (1), (2)

$$f(x+\xi) \ge f(x) + \frac{\alpha}{2}\|\xi\|^2 - \varepsilon\|\xi\|^2 \quad \forall \xi \in B(0, \delta_\varepsilon).$$

Wähle nun $\varepsilon := \alpha/4$, dann

$$f(x+\xi) \ge f(x) + \frac{\alpha}{4}\|\xi\|^2 > f(x) \quad \forall \xi \in B(0, \delta_{\alpha/4}).$$

$\Rrightarrow$ x isoliertes lokales Minimum.

(ii): Klar! (Betrachte $-f$ und wende (i) an.)

(iii): Sei A indef. Dann $\exists \xi_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $i = 1,2$, mit $\|\xi_i\| = 1$ und

$$\alpha_1 := \langle \xi_1, A\xi_1 \rangle > 0 > \langle \xi_2, A\xi_2 \rangle =: \alpha_2$$

Mit (1) gilt für $t \in]-\delta_{|\alpha_i|/4}, \delta_{|\alpha_i|/4}[$ und $i = 1,2$

$$f(x + t\xi_i) = f(x) + \frac{1}{2}\langle t\xi_i, At\xi_i \rangle + \varphi(t\xi_i) = f(x) + \frac{\alpha_i}{2}t^2 + \varphi(t\xi_i)$$

$$\geq f(x) + \frac{\alpha_1}{4}t^2 > f(x) \quad (\text{ da } \varphi(t\xi_1) \geq -\frac{\alpha_1}{4}t^2 \,)$$

bzw.

$$\leq f(x) + \frac{\alpha_2}{4}t < f(x) \quad (\text{ da } \varphi(t\xi_2) \leq \frac{|\alpha_2|}{4}t^2 = -\frac{\alpha_2}{4}t^2 \,)$$

$\Rrightarrow$ x kein lokales Extremum.

□

Beispiele 7.13. Im folgenden $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$.

(i) $f(x,y) := c + x^2 + y^2$. Dann

$$\operatorname{grad} f(x,y) = 2(x,y) = 0, \quad \text{falls } \; x = y = 0,$$

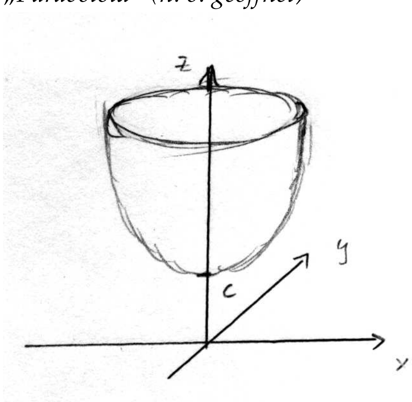
und

$$\text{Hess}\, f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{pos. def.}$$

$\underset{7.12}{\Rrightarrow}$ $(0,0)$ isoliertes lokales Minimum.

Graph von f: $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = c + x^2 + y^2\}$

„Paraboloid“ (n. o. geöffnet)



(ii) $f(x,y) := c - x^2 - y^2$. Dann

$$\operatorname{grad} f(x,y) = -2(x,y) = 0, \quad \text{falls} \;\; x = y = 0,$$

und

$$\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \textbf{neg. def.}$$

$\underset{7.12}{\Rrightarrow}$ $(0,0)$ isoliertes lokales Maximum.
$\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = c - x^2 - y^2\} =$ *n.u. geöffneter „Paraboloid"*.

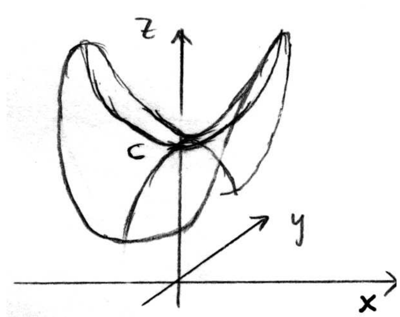
(iii) $f(x,y) := c + x^2 - y^2$. Dann

$$\operatorname{grad} f(x,y) = 2(x,-y) = 0, \quad \text{falls} \;\; x = y = 0,$$

und

$$\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \textbf{indef.}$$

$\underset{7.12}{\Rrightarrow}$ $(0,0)$ kein lokales Extremum.
$\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = c + x^2 - y^2\}$
„Sattelfläche"



(iv) Hess f **semidef.** Dann keine Aussage möglich.
Bsp.

$$f_1(x,y) := x^2 + y^4, \quad f_2(x,y) := x^2, \quad f_3(x,y) := x^2 + y^3.$$

Dann $\operatorname{grad} f_1(x,y) = (2x, 4y^3)$, $\operatorname{grad} f_2(x,y) = (2x, 0)$, $\operatorname{grad} f_3(x,y) = (2x, 3y^2)$, also $\operatorname{grad} f_k(0,0) = 0 \; \forall k \in \{1,2,3\}$ und

$$\operatorname{Hess} f_k(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{pos. semidef.}$$

Aber klar:

$(0,0)$	isoliertes lokales Minimum für f_1.
$(0,0)$	lokales Minimum für f_2, **nicht** isoliert, da $f_2(0,y) = 0\ \forall y \in \mathbb{R}$.
$(0,0)$	kein lokales Extremum für f_3, da $f(t,0) = t^2 > 0$, falls $t \neq 0$, $0 > t^3 = f(0,t)$, falls $t < 0$.

8 Implizite Funktionen

$U \subset \mathbb{R}^2$, offen, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $F : U \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ beide diff.bar mit $\Gamma_g = \{(x, g(x)) \mid x \in I\} \subset U$ und

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Dann mit Kettenregel (Korollar 6.9)

$$D_1 F(x, g(x)) + D_2 F(x, g(x)) g'(x) = 0$$

also, falls $D_2 F(x, g(x)) \neq 0$

$$g'(x) = -\frac{D_1 F(x, g(x))}{D_2 F(x, g(x))}. \tag{$*$}$$

Beachte:

(i) Man kann tatsächlich Diff.barkeit von g so beweisen! Man braucht nur Stetigkeit (siehe folgender Satz 8.1).

(ii) $(*)$ manchmal nützlich zur Berechnung von Ableitungen für komplizierte g (vgl. Übungen).

Satz 8.1. *Seien $a \in \mathbb{R}^k$, $b \in \mathbb{R}^m$, $r_1, r_2 > 0$,*

$$U_1 := \left\{x \in \mathbb{R}^k \;\middle|\; \|x - a\| < r_1\right\}, \quad U_2 := \left\{y \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \|y - b\| < r_2\right\}$$

und

$$F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m, \quad (x, y) \mapsto F(x, y),$$

(total) diff.bar in (a, b) mit:

(i) $F(a, b) = 0$,

(ii) $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) := \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b)\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}}$ *invertierbar.*

*Weiter sei $g : U_1 \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto g(x)$ **stetig** mit $g(a) = b$, $g(U_1) \subset U_2$ und*

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U_1.$$

Dann ist g in a diff.bar mit

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a) = -\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\Big)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) \quad (\textit{vgl. } (*) \textit{ für } m=k=1),$$

wobei $\frac{\partial g}{\partial x}(a) := \Big(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\Big)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le k}} = Dg(a)$, $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) := \Big(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a,b)\Big)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le k}}$.

Beachte $DF(a,b) = \Big(\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) \,\vdots\, \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\Big)$.

Beweis. Setze

$$\begin{aligned} A &:= \frac{\partial F}{\partial x}(a,b) \in M(m\times k,\mathbb{R}) \\ B &:= \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \in M(m\times m,\mathbb{R}) \quad \text{invertierbar nach Vor. (ii) !} \end{aligned}$$

F diff.bar in $(a,b) \Rightarrow$

$$\underset{\substack{\|\\ 0,\quad \text{falls } y := g(a+x)-b \text{ und } x\in B(0,r_1),}}{F(a+x,b+y)} = \underbrace{F(a,b)}_{=0} + \underbrace{DF(a,b)\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}}_{=Ax+By} + \varphi(x,y), \quad \varphi(x,y) = o\big(\|(x,y)\|\big),$$

somit

$$g(a+x) = b - B^{-1}Ax - \underbrace{B^{-1}\varphi(x,g(a+x)-b)}_{=:\,\psi(x)} \quad \forall x\in B(0,r_1). \qquad (+)$$

Sei $\tilde\delta, \varepsilon > 0$ mit:

$$\|\varphi(x,y)\| \le \frac{1}{2\|B^{-1}\|}\|(x,y)\| \le \frac{1}{2\|B^{-1}\|}\cdot\big(\|x\|+\|y\|\big) \quad \forall x\in B(0,\tilde\delta),\ y\in B(0,\varepsilon). \qquad (++)$$

Da g stetig $\exists\delta \in]0,\tilde\delta[$ mit $g(B(a,\delta)) \subset B(g(a),\varepsilon)$. Also folgt aus (+) und (++):

$$\begin{aligned} \forall x\in B(0,\delta) \ :\ \|g(a+x) - \underbrace{g(a)}_{=b}\| &\underset{(+)\&(++)}{\le} \|B^{-1}A\|\,\|x\| + \frac12\big(\|x\| + \underbrace{\|g(a+x)-b\|}_{<\varepsilon\ !}\big) \\ &\le \big(\|B^{-1}A\| + \frac12\big)\,\|x\| + \frac12\|g(a+x)+b\|. \end{aligned}$$

Somit

$$\|g(a+x)-g(a)\| \le \big(2\|B^{-1}A\|+1\big)\ \|x\|. \tag{$*$}$$

Da $g(a)=b$, bleibt zu zeigen:

$$\psi(x) = o(\|x\|).$$

Aber für $x \in B(0,\delta) \setminus \{0\}$

$$\frac{\|\psi(x)\|}{\|x\|} \le \underbrace{\|B^{-1}\| \ \frac{\|\varphi(x, g(a+x)-b)\|}{\underbrace{\|(x, g(a+x)-b)\|}_{\substack{\neq 0, \text{ und „klein" für} \\ x \text{ klein, da } g \text{ stetig}}}}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\, 0} \cdot \underbrace{\left\|\Big(\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\text{beschr.}}, \underbrace{\frac{g(a+x)-b}{\|x\|}}_{\substack{\text{beschr.}\\ \text{wegen } (*)}}\Big)\right\|}_{\text{beschr.}}$$

$$\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

□

Bemerkung 8.2. *Betrachte Situation von 8.1 (einschl. Bezeichnungen) und sei F stetig diff.bar auf $U_1 \times U_2$. Da $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ invertierbar, $\exists$ Umgebung $V_1 \times V_2$ von (a,b), so dass $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ ist invertierbar $\forall (x,y) \in V_1 \times V_2$. Denn:*

$$(x,y) \mapsto \det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)$$

ist stetig (da Polynom) und $\neq 0$ in (a,b), somit $\neq 0$ in ganzer Umgebung von (a,b).

Satz 8.3 („Satz über implizite Funktionen"). *Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$, beide offen,*

$$F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m, \quad (x,y) \mapsto F(x,y),$$

stetig diff.bar, $(a,b) \in U_1 \times U_2$ mit

(i) $F(a,b) = 0$,

(ii) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\ \big(\in M(m \times m, \mathbb{R})\big)$ *invertierbar.*

Dann:

(i)′ Es ***existieren*** *offene Umgebungen $V_1 \subset U_1$ von a, $V_2 \subset U_2$ von b und $\exists g : V_1 \to V_2$ stetig mit*

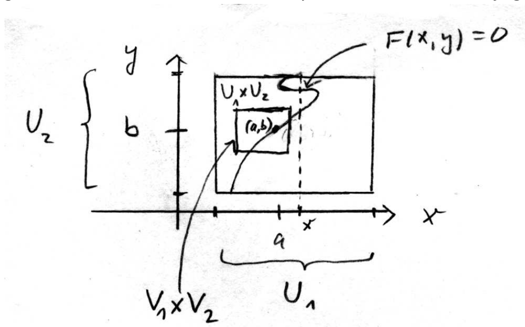
$$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in V_1.$$

Ist $(x,y) \in V_1 \times V_2$ mit $F(x,y) = 0$, dann $y = g(x)$ (insbes. g eindeutig).

(ii)′ Es existieren $W_1 \subset V_1$, W_1 offen, mit g stetig diff.bar auf W_1 und

$$Dg(x) = -\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\Big)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) \quad \forall x \in W_1.$$

Bemerkung 8.4. *Man sagt „implizite Funktion“ g entstehe durch „Auflösen“ der Gleichung $F(x, y) = 0$ nach y. Im Allgemeinen oben $V_1 \subsetneqq U_1$, $V_2 \subsetneqq U_2$. Auf ganz $U_1 \times U_2$ könnte es zu jedem x **mehrere** y geben. Beispiel:*



Beweis von 8.3. (ii)′: Behauptung folgt sofort aus (i)′ und 8.1, 8.2.

(i)′: Setze

$$B := \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \quad \big(\in M(m \times m, \mathbb{R})\big) \quad \text{(Invertierbar! Wegen Annahme (ii).)}$$

und definiere $G : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ durch

$$G(x, y) := y - B^{-1}F(x, y), \quad (x, y) \in U_1 \times U_2. \quad (G \text{ stetig!}) \tag{1}$$

Beachte

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G(x, y) = y, \tag{2}$$

und $\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = \mathbb{1} - B^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$, also $\frac{\partial G}{\partial y}(a, b) = 0$. Da alle Komponenten von Matrix $\frac{\partial G}{\partial y}$ stetig, $\exists$ Umgebungen $W_1 \subset U_1$ von a bzw. $W_2 \subset U_2$ von b mit

$$\sup_{\substack{x \in W_1 \\ y \in W_2}} \Big\| \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \Big\| \leq \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Sei $r > 0$ mit

$$V_2 := \big\{ y \in \mathbb{R}^m \;\big|\; \|y - b\| < r \big\} \subset W_2.$$

Da $G(a, b) = b$ (nach (3)) und G stetig, $\exists$ offene Umgebung $V_1 \subset W_1$ von a mit

$$\varepsilon := \sup_{x \in V_1} \left\| G(x, b) - b \right\| < \frac{r}{2}. \tag{4}$$

Beh. 1. $\forall x \in V_1 \ \exists$ **höchstens** ein $y \in V_2$ mit $F(x, y) = 0$, d.h.: $y = G(x, y)$.

Beweis. Sei $y_1, y_2 \in V_2$: $y_1 = G(x, y_1)$, $y_2 = G(x, y_2)$. Dann

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\| &= \|G(x, y_1) - G(x, y_2)\| \\ &\underset{6.14,(2)}{\leq} \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\| \end{aligned}$$

$\Rightarrow y_1 = y_2$. □

Beh. 2. $\exists g : V_1 \to V_2$ stetig mit $F(x, g(x)) = 0$, d.h.: $g(x) = G(x, g(x))$ $\forall x \in V_1$. (Da nach Beh. 1 solch ein g eindeutig, ist somit (i)′ gezeigt!)

Beweis. (vgl. Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes). Sei $g_0(x) := b \ \forall x \in V_1$.
Definiere induktiv $g_n : V_1 \to V_2$ durch

$$g_{n+1}(x) := G(x, g_n(x)), \quad x \in V_1. \tag{5}$$

Z.z.: $g_n(V_1) \subset V_2 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Zeige sogar (mit Induktion):

$$\underbrace{\|g_{n+1} - g_n\|_{V_1}}_{(:= \sup_{x \in V_1} |g_{n+1}(x) - g_n(x)|)} \leq 2^{-n}\varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Dann nämlich $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\|g_N - b\|_{V_1} = \left\| \sum_{n=0}^{N-1} g_{n+1} - g_n \right\|_{V_1} \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} 2^{-n} \leq 2\varepsilon < r, \tag{7}$$

also insbes. $g_N(V_1) \subset V_2$.
Zu (6):
$n = 0$: $\|g_1 - g_0\|_{V_1} = \|G(\cdot, b) - b\|_{V_1} \underset{(4)}{\leq} \varepsilon$.
$n \mapsto n + 1$: $\|g_{n+1} - g_n\|_{V_1} = \|G(\cdot, g_n(\cdot)) - G(\cdot, g_{n-1}(\cdot))\|_{V_1} \underset{6.14,(3)}{\leq}$
$\frac{1}{2}\|g_n - g_{n-1}\|_{V_1} \underset{\text{Ind.Ann.}}{\leq} 2^{-(n+1)}\varepsilon$.
$\Rightarrow$ (6).

Nach (6) konvergiert $g_N = \sum\limits_{n=0}^{N-1} (g_{n+1} - g_n)$, $N \in \mathbb{N}$, gleichmäßig auf V_1, also insbes.

$$g := \lim_{N\to\infty} g_N \quad \text{stetig auf } \; V_1,$$

und

$$\|g - b\|_{V_1} = \lim_{N\to\infty} \|g_N - b\|_{V_1} \underset{(7)}{\leq} 2\varepsilon < r,$$

also $g(V_1) \subset V_2$. Weiterhin $\forall x \in V_1$

$$G(x, g(x)) \underset{G \text{ stetig}}{=} \lim_{N\to\infty} G(x, g_N(x)) = \lim_{N\to\infty} g_{N+1}(x) = g(x).$$

$\Rrightarrow$ Beh. 2. $\square$

$\square$

Anwendung auf Höhenlinien

$U \subset \mathbb{R}^2$, offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, stetig diff.bar. $c \in \mathbb{R}$,

$$N_f(c) := \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = c\} \quad \text{„Höhenlinie zum Niveau } c\text{“}.$$

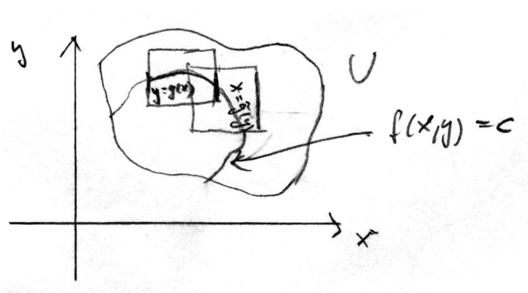
Beschreibung von $N_f(c)$ mit 8.3:
Sei $(a, b) \in N_f(c)$ mit grad $f(a, b) \neq (0, 0)$, d.h.: $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$ oder $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Wende nun 8.3 an auf $(x, y) \mapsto f(x, y) - c$, wobei im Fall, dass nur $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$ die Rollen von x und y zu vertauschen sind.

(a) **Ang.**: $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Dann nach 8.3 $\exists$ offene Intervalle $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ mit $(a, b) \in I_1 \times I_2 \subset U$ und $\exists g : I_1 \to I_2$ stetig diff.bar mit

$$N_f(c) \cap I_1 \times I_2 = \{(x, y) \in I_1 \times I_2 \mid y = g(x)\}$$

(b) **Ang.**: $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$. Dann nach 8.3 $\exists$ offene Intervalle $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}$ mit $(a, b) \in J_1 \times J_2 \subset U$ und $\exists \tilde{g} : J_2 \to J_1$ stetig diff.bar mit

$$N_f(c) \cap J_1 \times J_2 = \{(x, y) \in J_1 \times J_2 \mid x = \tilde{g}(y)\}$$



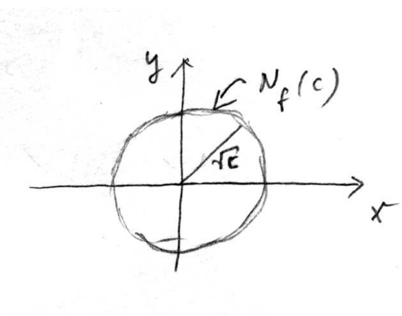
Höhenlinie in Umgebung von Punkt (a,b) mit $\operatorname{grad} f(a,b) \neq 0$ ist stets Graph einer Funktion $y = y(x)$ oder $x = x(y)$.

Beispiel 8.5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 + y^2$. Dann

$$\operatorname{grad} f(x,y) = 2(x,y).$$

$N_f(0) = \{(0,0)\}$. $N_f(c) = \emptyset$, falls $c < 0$. Sei $c > 0$, dann $\operatorname{grad} f(x,y) \neq (0,0)$ $\forall x, y \in N_f(c)$ und

$$\begin{aligned}
N_f(c) = \quad & \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = c\right\} \\
= \quad & \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in]-\sqrt{c}, \sqrt{c}[,\; y = \sqrt{c - x^2}\right\} \\
\cup \; & \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in]-\sqrt{c}, \sqrt{c}[,\; y = -\sqrt{c - x^2}\right\} \\
\cup \; & \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \in]-\sqrt{c}, \sqrt{c}[,\; x = \sqrt{c - y^2}\right\} \\
\cup \; & \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \in]-\sqrt{c}, \sqrt{c}[,\; x = -\sqrt{c - y^2}\right\}
\end{aligned}$$



Umkehrabbildungen

$U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f : U_1 \to U_2$ stetig diff.bar.
Wann f bijektiv und wann **Umkehrabbildung** $g : U_2 \to U_1$ diff.bar?

Ang. $\exists g$ und (total) diff.bar. Dann nach Kettenregel für $a \in U_1$

$$Dg(f(a))Df(a) = D(\mathrm{id}_{U_1}) = \mathbb{1} \ \ (:= (\delta_{ij}) \ ).$$

$\Rightarrow$ Funktionalmatrix $Df(a)$ invertierbar (**notwendige Bedingung**!). **Auch hinreichend**, falls man U_1, U_2 verkleinert! Denn man hat:

Satz 8.6 („Satz über inverse Funktionen"). *$U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig diff.bar, $a \in U$. Sei $Df(a)$ invertierbar. Dann $\exists$ offene Umgebung $V \subset U$ von a und offene Umgebung V' von $f(a)$ mit:*

$$f : V \to V' \quad \textit{bijektiv}$$

und Umkehrabbildung

$$g := f^{-1} : V' \to V$$

ist stetig diff.bar mit

$$Dg(f(a)) = (Df(a))^{-1}.$$

Beweis. Sei $F : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$F(x,y) := x - f(y), \quad (\text{ stetig diff.bar! }).$$

Dann für $b := f(a)$

$$F(b,a) = 0.$$

Da $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -Df(y)$ und $Df(a)$ invertierbar, ist 8.3 auf F anwendbar, somit $\exists$ offene Umgebungen V' von b, $V'' \subset U$ von a und genau ein $g : V' \to V''$ mit

$$0 = F(x, g(x)) = x - f(g(x)) \quad \forall x \in V' \tag{$*$}$$

und g stetig diff.bar auf V'. Setze

$$V := V'' \cap f^{-1}(V').$$

Dann V offene Umgebung von a, und nach $(*)$ ist $f : V \to V'$ bijektiv mit Umkehrabbildung $f^{-1} = g$. Mit Kettenregel

$$\mathbb{1} = D(\mathrm{id}_V)(a) = D(g \circ f)(a) = Dg(f(a))Df(a),$$

also

$$Dg(f(a)) = \big(Df(a)\big)^{-1}.$$

$\square$

Beispiel 8.7. $f :]0, \infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Dann

$$Df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det(Df(r, \varphi)) = r > 0.$$

Somit nach 8.6 f lokal um alle $(r, \varphi) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}$ invertierbar und

$$(Df(r, \varphi))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix}.$$

Falls $(x, y) := f(r, \varphi)$, also $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\frac{x}{r} = \cos \varphi$, $\frac{y}{r} = \sin \varphi$, folgt

$$\big(Df(r, \varphi)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = Dg(x, y), \qquad (+)$$

wobei $g := f^{-1}$ „**lokal**“. (Beachte f nicht injektiv.)
Konkret: $V := \left]0, \infty\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $V' :=]0, \infty[\times \mathbb{R}$, dann

$$f : V \to V' \quad \text{bijektiv},$$

und

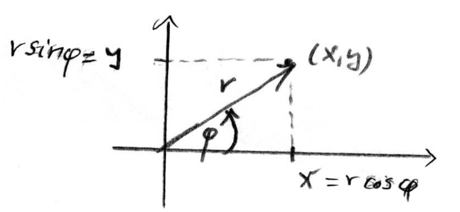
$$g : V' \to V$$

kann explizit berechnet werden als

$$g(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x}\right), \quad (x, y) \in V'.$$

Dann Dg direkt berechenbar, und man kann (+) checken. f ist surjektiv von $]0, \infty[\times \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, aber nicht injektiv, da $f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2\pi k)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. Ü
Ist $f(r, \varphi) = (x, y)$, d.h.

$$x = r \cos \varphi,$$
$$y = r \sin \varphi,$$



($r = \sqrt{x^2 + y^2}$, φ **eindeutig bis auf** ganzzahlige Vielfache von 2π) heißen (r, φ) *Polarkoordinaten* von (x, y).
Komplexe Schreibweise: $x + iy = re^{i\varphi}$.

Lokale Extrema mit Nebenbedingungen

Satz 8.8. *$U \subset \mathbb{R}^n$, offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar,*

$$M := \{x \in U \mid f(x) = 0\} \quad (= N_f(0) \text{ }),$$

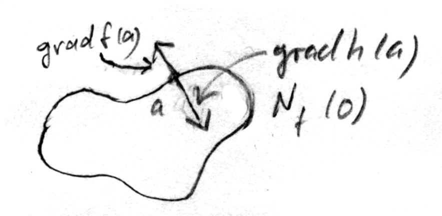
$a \in M$ mit grad $f(a) \neq 0$. *Weiter $h : U \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar, mit a* lokales Maximum *(bzw.* Minimum*)* unter der Nebenbedingung $f = 0$, *d.h.: $\exists$ Umgebung $V \subset U$ von a mit*

$$h(a) \geq h(x) \quad (\text{ bzw. } h(a) \leq h(x) \text{ }) \quad \forall x \in M \cap V.$$

*Dann $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ („*Lagrange-Multiplikator*") mit:*

$$\underbrace{\operatorname{grad} h(a) = \lambda \operatorname{grad} f(a)}_{\text{„notwendige Bedingung"!}}.$$

Geometrische Beschreibung 8.9. *Betrachte in 8.8 Fall $n = 2$. Auf der Höhenlinie $M = N_f(0)$ ändert sich die Funktion f nicht ($f = 0$ auf M !). Also hat* grad f *keine Komponente „parallel" zur Höhenlinie, also ist* grad f *senkrecht zur Höhenlinie $N_f(0)$. Aber „entlang" der Höhenlinie hat h Maximum (bzw. Minimum) in $a \in N_f(0)$, also notwendigerweise kann auch* grad h *keine Komponente „parallel" zu $N_f(0)$ haben, also steht* grad h *senkrecht auf $N_f(0)$. Also* grad f *parallel zu* grad h*, also z.B.*



(Ähnlich für beliebige $n \in \mathbb{N}$).

Beweis von 8.8. Œ: $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$ (sonst nummeriere Koordinaten um!).
Setze für $x = (x_1, \ldots, x_n) \subset U$, $x' := (x_1, \ldots, x_{n-1})$, also $x = (x', x_n)$, $a = (a', a_n)$. Nach 8.3 $\exists$ offene Umgebung $V' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von a' und offene Umgebung $V'' \subset \mathbb{R}$ von a_n mit $V' \times V'' \subset U$ sowie $\exists g : V' \to V''$ stetig diff.bar, so dass $f(x', g(x')) = 0 \,\forall x' \in V'$. Insbes.

$$M \cap (V' \times V'') = \{x \in V' \times V'' \mid x_n = g(x')\}.$$

Mit Kettenregel 6.9 folgt

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}\underbrace{(a', \underbrace{g(a')}_{=a_n})}_{=a} + \frac{\partial f}{\partial x_n}\underbrace{(a', \underbrace{g(a')}_{=a_n})}_{=a}\frac{\partial g}{\partial x_i}(a') \quad \forall 1 \leq i \leq n-1. \tag{1}$$

Definiere $H : V' \to \mathbb{R}$ durch $H(x') := h(x', g(x'))$. Da h in a auf M lokales Extremum hat, hat H in a' auf V' lokales Extremum, also nach 7.8

$$0 = \frac{\partial H}{\partial x_i}(a') \underset{\substack{\text{vgl.}\\ \text{oben}}}{=} \frac{\partial h}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial h}{\partial x_n}(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a') \quad \forall 1 \le i \le n-1. \tag{2}$$

Nun $\forall 1 \le i \le n-1$:

$$\begin{aligned}
&(1) \underset{\text{da } \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0}{\Rightarrow} \quad \frac{\partial g}{\partial x_i}(a') = -\Big(\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\Big)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\\
&\underset{(2)}{\Rightarrow} \quad \frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x_n}(a)\Big(\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\Big)^{-1}}_{=:\,\lambda}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a),
\end{aligned}$$

(trivialerweise auch richtig für $i = n$!).
$\Rightarrow \operatorname{grad} h(a) = \lambda \operatorname{grad} f(a)$. □

Beispiel 8.10. Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch und

$$h(x) := \langle x, Ax\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

zugehörige quadratische Form.
Wollen Extrema von h auf $\partial B(0,1)$ bestimmen. Dazu setze

$$\begin{aligned}
f(x) &:= \langle x, x\rangle - 1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1,\\
M &:= N_f(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \quad (= \partial B(0,1)\ ).
\end{aligned}$$

Weiter

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad} f(x) = 2x \neq 0 \quad \forall x \in M,\\
&\operatorname{grad} h(x) \underset{6.3\,(i)}{=} 2Ax.
\end{aligned}$$

Da M kompakt und $h : M \to \mathbb{R}$ stetig, $\exists a \in M$ mit a ist Maximum (bzw. Minimum) von h. Nach 8.8 $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$Aa = \lambda a,$$

d.h.: a ist Eigenvektor von A und Lagrange-Multiplikator λ ist zugehöriger Eigenwert. Da

$$h(a) = \langle a, Aa\rangle = \langle a, \lambda a\rangle \underset{a \in M}{=} \lambda$$

wird Maximum (bzw. Minimum) bei Eigenvektor zum **größten** (bzw. **kleinsten**) Eigenwert angenommen.

Bemerkung. *Oben mitbewiesen: Symmetrische reelle Matrix hat mindestens einen* ***reellen*** *Eigenwert. Dann kann man per Induktion zeigen, dass* ***alle*** *Eigenwerte reell.*

9 Parameter-abhängige Integrale

Lemma 9.1. *$[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall, $U \subset \mathbb{R}^m$ beliebig, $f : [a, b] \times U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig. Seien $y_k \in U$, $k \in \mathbb{N}$, mit $c := \lim y_k \in U$. Dann konvergieren die Funktionen*

$$F_k : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F_k(x) := f(x, y_k), \quad x \in [a, b],$$

*für $k \to \infty$ **gleichmäßig** gegen die Funktion*

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := f(x, c), \quad x \in [a, b].$$

Beweis. Nach 3.2 (i) ist

$$Q := \{y_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{c\} \quad \text{kompakt in } \mathbb{R}^m,$$

also abgeschlossen und beschränkt. Nach 1.7 (ii) ist $[a, b] \times Q$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^{1+m}$ und offensichtlich beschränkt, somit nach 3.6 kompakt, also nach 3.8 (ii)

$$f\restriction_{[a,b]\times Q} \quad \text{gleichmäßig stetig.}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann $\exists \delta > 0$ mit: $\forall (x, y), (x', y') \in [a, b] \times Q$

$$\|(x, y) - (x', y')\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

Da $y_k \to c$, $\exists N \in \mathbb{N}$ mit:

$$\|c - y_k\| < \delta \quad \forall k \geq N.$$

(Also: $\|(x, y_k) - (x, c)\| < \delta \; \forall k \geq N$.)
Somit $\forall k \geq N$

$$|F(x) - F_k(x)| = |f(x, c) - f(x, y_k)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

□

Satz 9.2. *Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall, $U \subset \mathbb{R}^m$ beliebig, $f : [a, b] \times U \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere*

$$\varphi(y) := \int_a^b f(x, y)\, dx, \quad y \in U.$$

Dann $\varphi : U \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis. Sei $c, y_k \in U$, $k \in \mathbb{N}$, mit $y_k \to c$. Dann gilt mit Bezeichnungen aus 9.1

$$\varphi(y_k) = \int_a^b F_k(x)\, dx, \quad \varphi(c) = \int_a^b F(x)\, dx.$$

Da nach 9.1 $F_k \to F$ gleichmäßig auf $[a,b]$, folgt mit Satz 20.11 aus Ana. I

$$\varphi(c) = \int_a^b F(x)\, dx \stackrel{!}{=} \lim \int_a^b F_k(x)\, dx = \lim \varphi(y_k).$$

□

Lemma 9.3. *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle und*

$$f : I \times J \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y),$$

stetig, nach der zweiten Variable stetig partiell diff.bar. Sei $c, y_k \in J$, $k \in \mathbb{N}$, mit $y_k \to c$ und $c \neq y_k$ $\forall k$. Definiere für $k \in \mathbb{N}$

$$F_k(x) := \frac{f(x,y_k) - f(x,c)}{y_k - c}, \quad x \in I,$$
$$F(x) := \frac{\partial f}{\partial y}(x,c).$$

*Dann $F_k \to F$ **gleichmäßig** auf I.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Die stetige Funktion $D_2 f : I \times J \to \mathbb{R}$ ist nach 3.8 (ii) gleichmäßig stetig, somit $\exists \delta > 0$:

$$x \in I;\ y, y' \in J \text{ mit } |y - y'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |D_2 f(x,y) - D_2 f(x,y')| < \varepsilon.$$

Nach MWS der Differentialrechnung gibt es $\forall x \in I$, $k \in \mathbb{N}$ ein $\eta_k(x)$ zwischen c und y_k mit

$$F_k(x) = D_2 f(x, \eta_k).$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ mit: $|c - y_k| < \delta$ $\forall k \geq N$. Dann auch $|c - \eta_k(x)| < \delta$ $\forall k \geq N$. Somit $\forall k \geq N$

$$|F(x) - F_k(x)| = |D_2 f(x,c) - D_2 f(x, \eta_k(x))| < \varepsilon \quad \forall x \in I.$$

□

Satz 9.4. *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle und $f : I \times J \to \mathbb{R}$ stetig, nach der zweiten Variablen stetig partiell diff.bar. Definiere*

$$\varphi(y) := \int_I f(x,y)\, dx.$$

Dann ist $\varphi : J \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar und

$$\frac{d\varphi}{dy}(y) = \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx.$$

Beweis. Sei $c, y_k \in J$, $k \in \mathbb{N}$, mit $y_k \to c$ und $y_k \neq c$ $\forall k$. Seien F_k, F wie in 9.3 definiert. Da $F_k \to F$ gleichmäßig auf I, gilt nach Satz 20.11 aus Ana. I

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dy}(c) = \lim \frac{\varphi(y_k) - \varphi(c)}{y_k - c} &= \lim \int_I F_k(x)\, dx \overset{!}{=} \int F(x)\, dx \\ &= \underbrace{\int_I \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x,c)}_{\text{stetig auf } I \times J \text{ nach Vor.}} dx}_{\text{stetig auf } I \text{ nach 9.2}}.\end{aligned}$$

□

Korollar 9.5. *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : [a,b] \times U \to \mathbb{R}$, $(x, y_1, \dots, y_n) \mapsto f(x, y_1, \dots, y_n)$ stetig, bzgl. $y_1, \dots, y_n$ stetig partiell diff.bar. Dann $\forall 1 \leq i \leq n$*

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y_1, \dots, y_n)\, dx.$$

Beweis. Definition von partieller Ableitung und 9.4. □

Satz 9.6. *Sei $U := B(0,r)$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ mit $r > 0$ und $v = (v_1, \dots, v_n) : U \to \mathbb{R}^n$ stetig diff.bares Vektorfeld. Dann sind äquivalent:*

(i) $\exists f : U \to \mathbb{R}^n$ *zweimal stetig diff.bar mit*

$$\operatorname{grad} f = v \quad \text{auf } U.$$

(ii)

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): $\forall 1 \leq i, j \leq n$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \underset{5.11}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Definiere

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_0^1 v_i(tx)\ dt \Big) x_i\ , \quad x \in U.$$

Dann mit 9.5 $\forall 1 \leq j \leq n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 v_i(tx)\ dt \Big) x_i + \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_0^1 v_i(tx)\ dt \Big) \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{=\delta_{ij}}$$

$$\underset{9.5}{=} \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_0^1 t D_j v_i(tx)\ dt \Big) x_i + \int_0^1 v_j(tx)\ dt.$$

Aber für $x \in U$ fest

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(t v_j(tx)) &= v_j(tx) + t \sum_{i=1}^{n} D_i v_j(tx) x_i \\ &\underset{\text{(ii)}}{=} v_j(tx) + t \sum_{i=1}^{n} D_j v_i(tx) x_i. \end{aligned}$$

Somit

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(t v_j(tx))\ dt = t v_j(tx) \Big|_0^1 = v_j(x).$$

Insbes. dann auch f zweimal stetig diff.bar. $\square$

Doppelintegrale

Satz 9.7. *$[a,b], [c,d] \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle und $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann*

$$\int_a^b \underbrace{\Big(\int_c^d f(x,y)\ dy \Big)}_{\substack{\text{stetig in } x \\ \text{nach 9.2}}} dx = \int_c^d \underbrace{\Big(\int_a^b f(x,y)\ dx \Big)}_{\substack{\text{stetig in } y \\ \text{nach 9.2}}} dy.$$

Beweis. Definiere $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(y) := \int_a^b \Big(\int_c^y f(x,t)\, dt \Big)\, dx.$$

Dann $\varphi(c) = 0$ und $F(x,y) := \int_c^y f(x,t)\ dt$, $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$ ist stetig partiell diff.bar nach y und stetig auf $[a,b] \times [c,d]$, denn

$$\begin{aligned}|F(x,y) - F(x',y')| &\leq \int_{y'}^{y} |f(x,t)|\, dt + \int_c^{y'} |f(x,t) - f(x',t)|\, dt \\ &\leq |y-y'| \sup_{\substack{x\in[a,b]\\ t\in[c,d]}} |f(x,t)| + \int_c^d \underbrace{|f(x,t)-f(x',t)|}_{< \frac{\varepsilon}{d-c}\ \forall t\ ,\ \text{falls } |x-x'| \text{ klein, wegen } f \text{ glm. stetig.}}\, dt\end{aligned}$$

Somit nach 9.4

$$\varphi'(y) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} \Big(\int_c^y f(x,t)\, dt \Big)\, dx = \int_a^b f(x,y)\, dx,$$

also

$$\begin{aligned}\int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\, dx \Big)\, dy &= \int_c^d \varphi'(y)\, dy = \varphi(d) - \underbrace{\varphi(c)}_{\substack{=0\\ \text{s.o.}}} \\ &= \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,t)\, dt \Big)\, dx.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 9.8. *Analoger Satz gilt für Mehrfachintegrale, d.h.: f ist auf Quader $I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ definiert.*

Eulersche Differentialgleichungen der Variationsrechnung

$I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall und

$$L : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (t,y,p) \mapsto L(t,y,p)$$

zweimal stetig partiell diff.bar. Bezeichne $C^2[a,b]$ den Vektorraum aller zweimal stetig diff.baren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, fest,

$$K := \left\{ \varphi \in C^2[a,b] \;\middle|\; \varphi(a) = c_1, \varphi(b) = c_2 \right\}.$$

Definere Abbildung $S : K \to \mathbb{R}$ durch

$$S(\varphi) := \int_a^b L(t, \varphi(t), \varphi'(t))\, dt, \quad \varphi \in K.$$

Problem der Variationsrechnung: Finde $\varphi \in K$ mit

$$S(\varphi) = \inf\{S(\psi) \mid \psi \in K\}.$$

Satz 9.9. *Mit obigen Bezeichnungen gilt: Eine **notwendige** Bedingung für $\varphi \in K$, dass $S(\varphi) = \inf\limits_{\psi \in K} S(\psi)$, ist:*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - \frac{\partial L}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0 \quad \forall t \in [a,b],$$

„Eulersche Differentialgleichung“.

***Achtung**: Solch ein φ **muss** nicht existieren!*

Beweis. Sei $\varphi \in K$ mit $S(\varphi) \leq S(\psi)\ \forall \psi \in K$, und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beliebig, zweimal stetig diff.bar mit

$$g(a) = g(b) = 0. \tag{1}$$

Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist $\varphi + \varepsilon g \in K$, somit: $S(\varphi) \leq S(\varphi + \varepsilon g)$. Definiere

$$F(\varepsilon) := S(\varphi + \varepsilon g), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Mit 9.4, 9.5 folgt (Voraussetzungen sind erfüllt! $\boxed{\text{Ü}}$!):

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{dF}{d\varepsilon}(\varepsilon)}_{\text{„}\exists\text{ und ...“}} &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(t, \varphi(t) + \varepsilon g(t), \varphi'(t) + \varepsilon g'(t))\, dt \qquad (2) \\ &\underset{6.9}{=} \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}(\cdots) g(t) + \frac{\partial L}{\partial p}(\cdots) g'(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Aber mit partieller Integration und (1) gilt

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial p}(\cdots)g'(t)\,dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial p}(\cdots)g(t)\Big|_a^b}_{\underset{(1)}{=}0} - \int_a^b g(t)\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial p}(\cdots)\Big)\,dt.$$

Da F in $\varepsilon = 0$ Minimum hat, folgt dann aus (2)

$$0 = \frac{dF}{d\varepsilon}(0) = \int_a^b \Big[\frac{\partial L}{\partial y}(t,\varphi(t),\varphi'(t)) - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial p}(t,\varphi(t),\varphi'(t))\Big]g(t)\,dt.$$

Nun folgt die Behauptung aus folgendem Lemma. ☐

Lemma 9.10. *Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für* ***jedes*** *$g \in C^2[a,b]$ mit $g(a) = g(b) = 0$ gelte*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0.$$

Dann $f(t) = 0\ \forall t \in [a,b]$.

Beweis. Wegen Stetigkeit von f reicht z.z.:

$$f(t) = 0 \quad \forall t \in]a,b[$$

Ang. $\exists x \in]a,b[$ mit $f(x) \neq 0$. Œ: $\varepsilon := f(x) > 0$ (sonst betrachte $(-f)$).
Dann $\exists \delta > 0$: $[x-\delta, x+\delta] \subset [a,b]$ und

$$f(t) \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in [x-\delta, x+\delta].$$

Es existiert $g : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ zweimal stetig diff.bar mit

$$g(x) > 0 \quad \text{und} \quad g(t) = 0 \quad \forall t \notin [x-\delta, x+\delta]. \tag{$*$}$$

(Denn betrachte

$$h(t) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } t \leq 0, \\ e^{-1/t} & \text{, falls } t > 0, \end{cases}$$

dann h nach Übungen beliebig oft diff.bar, also ist auch $g(t) := h(\delta^2 - (t-x)^2)$ **beliebig oft** diff.bar auf $[a,b]$ und g erfüllt $(*)$.)
Dann

$$0 = \int_a^b f(t)g(t)\,dt = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)g(t)\,dt \geq \frac{\varepsilon}{2}\int_{x-\delta}^{x+\delta} g(t)\,dt > 0. \quad ↯$$

☐

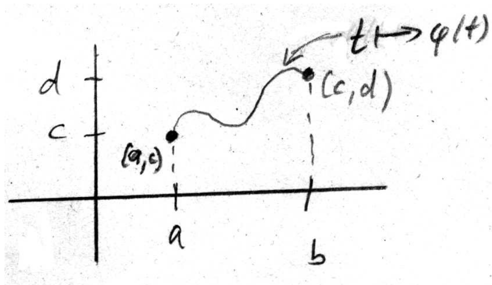
Beispiel 9.11. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ und

$$K := \{\varphi \in C^2[a,b] \mid \varphi(a) = c, \varphi(b) = d\}.$$

Sei

$$S(\varphi) := \int_a^b \sqrt{1 + (\varphi'(t))^2}\, dt \underset{4.9}{=} \text{Länge der Kurve } t \mapsto (t, \varphi(t)), \quad t \in [a,b].$$

Wollen $S(\varphi)$ auf K minimieren: Suche also kürzeste (a,c) mit (b,d) verbindende Kurve.



Anwendung von 9.9 mit

$$L(t, y, p) = \sqrt{1 + p^2}$$

ergibt: Ist φ Minimum von S auf K, so muss gelten:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial p}(\cdots)}_{=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial y}(\cdots)}_{=0} = \frac{d}{dt} \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1 + (\varphi'(t))^2}} \\
&= \frac{\varphi''(t)}{\sqrt{1 + (\varphi'(t))^2}} - \varphi'(t) \frac{\varphi'(t)\varphi''(t)}{(1 + (\varphi'(t))^2)^{3/2}} \\
\Rightarrow \quad 0 &= \varphi''(t) \underbrace{\left(1 - \frac{(\varphi'(t))^2}{1 + (\varphi'(t))^2}\right)}_{= \frac{1}{1 + (\varphi'(t))^2} > 0}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi''(t) = 0 \quad \underset{\text{Ana. I}}{\Rightarrow} \quad \varphi(t) = \alpha + \beta t \quad \text{für} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Wegen $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$ muss gelten

$$c = \alpha + \beta a\,, \quad d = \alpha + \beta b$$

also $\beta = \frac{c-d}{a-b}$ und $\alpha = \frac{ad-bc}{a-b}$. Somit

$$\varphi(t) = \frac{ad-bc}{a-b} + \frac{c-d}{a-b}t.$$

Also φ Gerade von (a,c) nach (b,d). Dass φ auch tatsächlich S über K minimiert, kann man hier durch einfache geometrische Überlegungen zeigen. **Im Allgemeinen** ist es jedoch **schwierig** zu zeigen, dass das durch 9.9 gefundene **mögliche** Minimum auch tatsächlich eins ist.

Bemerkung 9.12. *9.9 kann sofort auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden: Sei $L : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(t, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n) \mapsto L(t, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)$ zweimal stetig partiell diff.bar und K die Menge aller $\varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, zweimal stetig partiell diff.bar mit $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$, für $c, d \in \mathbb{R}^n$ fest vorgegeben. Sei $S : K \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$S(\varphi) := \int_a^b L(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t), \varphi_1'(t), \ldots, \varphi_n'(t))\, dt.$$

Sei $\varphi \in K$ mit $S(\varphi) = \inf\{S(\psi) \mid \psi \in K\}$. Dann

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p_i}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - \frac{\partial L}{\partial y_i}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

„Eulersche Differentialgleichungen".

10 Gewöhnliche Differentialgleichungen: Existenz und Eindeutigkeitssatz

Definition 10.1. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $f : G \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig. Dann heißt

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

Differentialgleichung erster Ordnung. Eine *Lösung* von (1) ist eine auf Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte, diff.bare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit:

(a) $\Gamma_\varphi \ (= \{(x, \varphi(x)) \mid x \in I\}) \subset G$,

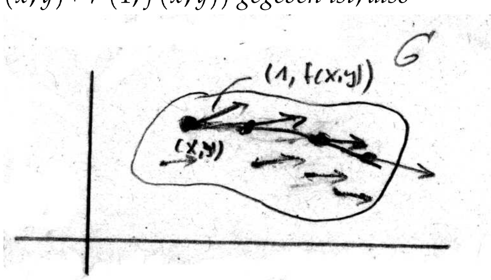
(b) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \ \forall x \in I$.

Bemerkung 10.2. *φ Lösung von (1)* ***genau dann, wenn*** *für $x_0 \in I$ fest*

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) \, dt, \tag{$*$}$$

(nach Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung!).
Damit (1) aber ***nicht*** *gelöst, da φ in rechter Seite auftritt (es sei denn f hängt nicht von y ab). Aber mit Hilfe der äquivalenten Umformulierung $(*)$ von (1) werden wir (1) später lösen.*

Geometrische Interpretation 10.3. *Diff.gleichung $y' = f(x, y)$ auf $G \subset \mathbb{R}^2$ bestimmt* Richtungsfeld*: In jedem $(x, y) \in G$ ist ein Vektor $(1, f(x, y))$ vorgegeben. Eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ergibt vermöge $x \mapsto (x, \varphi(x))$ eine Kurve in G, so dass das* Geschwindigkeitsfeld *dieser Kurve gerade durch das Vektorfeld $(x, y) \mapsto (1, f(x, y))$ gegeben ist, also*

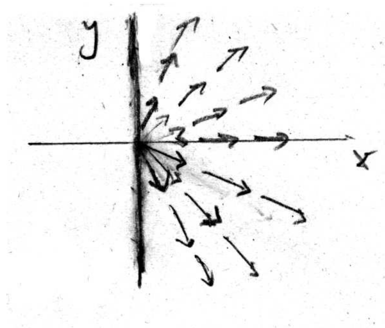


Lösungen nicht eindeutig! Man braucht „Anfangswertbedingung"!
Bsp.

a) $G = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{y}{x}.$$

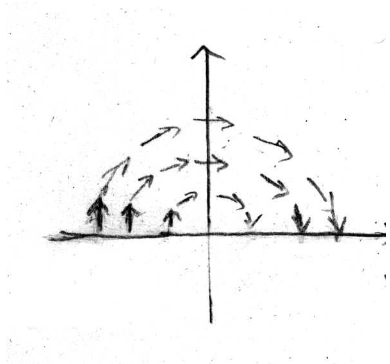
Lösungen: $\varphi(x) = cx$, *„Geraden":*



b) $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$

$$f(x,y) = -\frac{x}{y}.$$

Lösungen: $\varphi(x) = \sqrt{c - x^2}$, $x \in]-\sqrt{c}, \sqrt{c}[$, *„Halbkreise":*



Definition 10.4. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f := (f_1, \ldots, f_n) : G \to \mathbb{R}^n$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ stetig. Dann heißt

$$y' = f(x,y) \qquad \left(\Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} y_1' & = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots & \\ y_n' & = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{array} \right) \tag{2}$$

ein *System von n Differentialgleichungen erster Ordnung*. Eine *Lösung* von (2) ist auf Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte diff.bare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ mit:

(a) $\Gamma_\varphi \subset G$,

(b) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))\ \forall x \in I$.

Definition 10.5. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{3}$$

eine *Differentialgleichung n-ter Ordnung*. Eine *Lösung* von (3) ist auf Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte n-mal diff.bare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit

(a) $\{(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \mid x \in I\} \subset G$,

(b) $\varphi^n(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))\ \forall x \in I$.

Reduktion auf ein System 1. Ordnung

Man kann Dgl. n-ter Ordnung auf System von Dgl.'s 1. Ordnung zurückführen. Dazu betrachte das Dgl.system

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2}' = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases} \tag{4}$$

Setze

$$Y := \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(x, Y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(x, Y) \end{pmatrix} .$$

Dann (4) äquivalent zu

$$Y' = F(x, Y). \tag{5}$$

Sei nun $\varphi : I \to \mathbb{R}$ Lösung von (3), d.h.:

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in I.$$

Dann löst

$$\Phi := \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$$

Dgl.system (5).

Sei umgekehrt

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$$

Lösung von (5) ($\Leftrightarrow$ (4)).
Beh.: $\varphi := \varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ löst (3).

Beweis. Φ löst (4). Also

$$\begin{aligned}
\varphi' &= \varphi_0' = \varphi_1 \\
\varphi'' &= \varphi_1' = \varphi_2 \\
&\vdots \\
\varphi^{(n-1)} &= \varphi_{n-2}' = \varphi_{n-1} \\
&\text{und} \\
\varphi^{(n)} &= \varphi_{n-1}' = f(x, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = f(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(n-1)})
\end{aligned}$$

□

Entsprechend für **Systeme** von Dgl.'s n-ter Ordnung!
Also sind (3) und (4) ($\Leftrightarrow$ (5)) äquivalent, d.h.: Die Lösungen stehen in **eineindeutiger** Beziehung zueinander.
Beachte besonders wichtig (z.B. in der Physik) Fall $n = 2$.

Bemerkung 10.6. *In diesem und nächsten Kaptiteln werden* gewöhnliche *Differentialgleichungen betrachtet. Also gesucht: Funktionen von einer Variablen. In Kapitel 5 haben wir dagegen Beipiele* partieller *Differentialgleichungen gesehen (Laplace-, Wärmeleitungs-, Wellengleichung), d.h.: Funktionen mehrerer Variablen gesucht, die Gleichungen für ihre partiellen Ableitungen genügen.*

Definition 10.7. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}^n$. f genügt (in G) *Lipschitz-Bedingung* (oder kurz: f ist *Lipschitz*) mit *Lipschitz-Konstante* $L \geq 0$, falls

$$\|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\| \quad \forall (x,y), (x,\tilde{y}) \in G.$$

f genügt in G *lokal* einer *Lipschitz-Bedingung* (oder kurz: f ist *lokal Lipschitz*), falls $\forall (a,b) \in G$ Umgebung U existiert mit f genügt Lipschitz-Bedingung in $G \cap U$ mit einer gewissen (**von** U **abhängigen** Lipschitz-Konstanten $L \geq 0$.

Satz 10.8. *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ bzgl. $y = (y_1, \dots, y_n)$ partiell diff.bar und $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y_i}(x,y)$ stetig $\forall 1 \leq i \leq n$. Dann f lokal Lipschitz in G.*

Beweis. Sei $(a,b) \in G$. Dann $\exists r > 0$ mit

$$V := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x-a| \leq r,\ \|y-b\| \leq r \right\} \subset G.$$

V ist kompakte Umgebung von (a,b). Wegen Stetigkeit der Komponenten der $n \times n$-Matrix $\frac{\partial f}{\partial y}$ folgt

$$L := \sup \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right\| \;\middle|\; (x,y) \in V \right\} < \infty.$$

Aus MWS 6.14 folgt somit:

$$\|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\| \leq L \|y - \tilde{y}\| \quad \forall (x,y),(x,\tilde{y}) \in V.$$

□

Satz 10.9 (Eindeutigkeit). *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, die lokal Lipschitz-Bedingung genügt. Seien $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ Lösungen der Dgl.*

$$y' = f(x,y)$$

über einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Falls

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0) \quad \textit{für } \textbf{\textit{ein}} \ \ x_0 \in I,$$

dann

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \textit{für } \textbf{\textit{alle}} \ \ x \in I.$$

Beweis. Der Beweis geht in 3 Schritten.

Schritt 1: **Zeige:** Ist $\varphi(a) = \psi(a)$ für ein $a \in I$, so $\exists \varepsilon > 0$ mit $\varphi(x) = \psi(x)$ $\forall x \in I \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.
Per Integration folgt aus $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, $\psi'(x) = f(x, \psi(x))$ wegen $\varphi(a) = \psi(a)$ für alle $x \in I$

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_a^x \Big(f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)) \Big)\, dt \quad \big(\in \mathbb{R}^n \ \ ! \big).$$

Da f lokal Lipschitz, $\exists L \geq 0$ und $\delta > 0$:

$$\left\| f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)) \right\| \leq L \|\varphi(t) - \psi(t)\| \quad \forall t \in I \cap [a - \delta, a + \delta].$$

Dann aber

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq L \int\limits_{\min(a,x)}^{\max(a,x)} \|\varphi(t) - \psi(t)\| \, dt \quad \forall x \in I \cap [a - \delta, a + \delta]$$

$$\underset{\substack{\text{Gronwall} \\ \text{(vgl. Übungen zu Ana. I)}}}{\Rightarrow} \qquad \varphi(x) = \psi(x) \quad \forall x \in I \cap [a - \delta, a + \delta]$$

.

Schritt 2: **Zeige:** $\varphi(x) = \psi(x)\ \forall x \in I$ mit $x \geq x_0$.
Sei $x_1 := \sup\{\xi \in I \mid \varphi = \psi \text{ auf } [x_0, \xi]\}$. Falls x_1 = rechte Intervallgrenze, sind wir fertig. Falls nicht $\exists \delta > 0$ mit $[x_1, x_1 + \delta] \subset I$. Da φ, ψ stetig, gilt $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$ und somit nach Schritt 1 $\exists \varepsilon > 0$ mit

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \forall x \in I \cap [x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$$

$\underset{x_1 + \varepsilon > x_1}{\Rightarrow}$ ↯ zur Maximalität von x_1.

Schritt 3: **Zeige:** $\varphi(x) = \psi(x)\ \forall x \in I$ mit $x \leq x_0$ analog!

□

Beispiel 10.10. Dgl., für die 10.9 **nicht** gilt:

$$y' = y^{2/3} \quad \text{(definiert auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}\text{).} \tag{$*$}$$

Eine Lösung $\varphi_0(x) := 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. **Andere** Lösungen

$$\psi_a(x) := \frac{1}{27}(x - a)^3, \quad x \in \mathbb{R},$$

$\boxed{\text{Ü}}$ für $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Auch $\varphi_0(a) = \psi_a(a) = 0$. Also 10.9 nicht gültig! **Weitere** Lösungen: Sei $b < a < c$ und

$$\psi(x) := \begin{cases} \psi_b(x) & \text{, falls } x \leq b, \\ 0 & \text{, falls } b \leq x \leq c, \\ \psi_c(x) & \text{, falls } x \geq c, \end{cases}$$

diff.bar ($\boxed{\text{Ü}}$) und löst $(*)$ ($\boxed{\text{Ü}}$)!
Auch $\psi(a) = 0$. Nach 10.9 also $f(x, y) = y^{2/3}$ nicht überall lokal Lipschitz. Für $y \neq 0$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{2}{3} y^{-1/3}$, also nach 10.8 f lokal Lipschitz auf $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus$
$\boxed{\text{Ü}}$ $\{0\})$. Aber f erfüllt in keiner Umgebung von $(a, 0)$ Lipschitz-Bedingung.

Satz 10.11 (Existenzsatz von Picard-Lindelöf). *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz. Dann $\forall (a,c) \in G$ $\exists \varepsilon > 0$ und $\exists$ Lösung*

$$\varphi : [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \to \mathbb{R}^n$$

der Dgl. $y' = f(x,y)$ mit „Anfangsbedingung" $\varphi(a) = c$.

Bemerkung 10.12. *Nach 10.9 ist φ durch Bedingung $\varphi(a) = c$ eindeutig bestimmt.*

Beweis von 10.11. Sei $(a,c) \in G$. Dann $\exists r > 0$, so dass

$$V := \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x-a| \le r,\ \|y-c\| \le r\right\} \subset G$$

und f Lipschitz auf V mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. Da V kompakt, f stetig, $\exists M > 0$:

$$\|f(x,y)\| \le M \quad \forall (x,y) \in V.$$

Sei $\varepsilon := \min\left(r, \frac{r}{M}, \frac{1}{2L}\right)$ und $I := [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Sei

$$X_1 := \{\varphi : I \to \mathbb{R}^n \mid \varphi \text{ stetig}\} \quad \text{mit Sup.norm } \|\ \|_\infty.$$

Analog zum Fall $n = 1$, d.h. Korollar 2.35, zeigt man, dass $(X_1, \|\ \|_\infty)$ vollständig. Sei

$$X := \left\{\varphi \in X_1 \;\middle|\; \|\varphi - c\| \le r\right\} = \textbf{abg.} \text{ Kugel um } c \text{ mit Radius } r \text{ (in } X_1).$$

$(X, \|\ \|_\infty)$ vollständig, da X abg. Definiere $T : X \to X$, $\varphi \mapsto T\varphi$, $\varphi \in X$, durch

$$T\varphi(x) := c + \int_a^x f(t, \varphi(t))\, dt, \quad x \in I.$$

(Wohldefiniertheit: Es gilt tatsächlich, dass $T\varphi$ stetig. Nach Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung sogar diff.bar, da $t \mapsto f(t,\varphi(t))$ stetig. Weiterhin

$$\|T\varphi(x) - c\| \le \int_{\min(a,x)}^{\max(a,x)} \underbrace{\|f \underbrace{(t,\varphi(t))}_{\in V,\ \substack{\text{da } |t-a| \le \varepsilon \le r \\ \text{und } \varphi \in X}} \|}_{\le M} dt \quad \forall x \in I$$

$$\le M|x-a| \le M\varepsilon \le r,$$

also $T\varphi \in X$!)
Weiterhin $\forall \varphi, \psi \in X$ und $x \in I$

$$\|(T\varphi - T\psi)(x)\| \leq \int\limits_{\min(a,x)}^{\max(a,x)} \underbrace{\|f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))\|}_{\leq L|\varphi(t)-\psi(t)|} \, dt$$
$$\leq L\|\varphi - \psi\|_\infty \underbrace{|a-x|}_{\leq \varepsilon} \underset{\varepsilon \leq \frac{1}{2L}}{\leq} \frac{1}{2}\|\varphi - \psi\|_\infty.$$

Also $\|T\varphi - T\psi\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|\varphi - \psi\|_\infty$.
$\underset{\substack{\text{Banachscher}\\ \text{Fixpunktsatz}\\ 2.32}}{\Rightarrow}$ $\exists$ **genau** ein $\varphi \in X$ mit

$$T\varphi = \varphi.$$

Aber nach Fundamentalsatz ist letzteres äquivalent zu

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in I, \;\; \varphi(a) = c.$$

$\square$

Übung. *Vgl. obigen Beweis mit dem von* [For99, §10, Satz 3]*! (Stichwort: „Picard-Lindelöfsche Iterationsverfahren“, schnellere Konvergenz!)*

Beispiel 10.13. Manchmal kann man mit obiger Beweismethode (d.h.: die vom Banachschen Fixpunktsatz) Lösung explizit konstruieren. Betrachte

$$y' = 2xy \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Suche Lösung φ mit $\varphi(0) = c$. Setze $\varphi_0(x) = c \; \forall x$, dann

$$\varphi_1(x) = c + \int\limits_0^x 2tc \, dt = c(1 + x^2)$$
$$\varphi_2(x) = c + \int\limits_0^x 2tc(1+t^2) \, dt = c\big(1 + x^2 + \frac{x^4}{2}\big)$$
$$\vdots$$
$$\varphi_k(x) = c\big(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!}\big).$$

(*Beweis.* Induktion. ($\boxed{\text{ü}}$)!)
Somit

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = ce^{x^2}.$$

Verifikation durch Einsetzen. In diesem Fall sogar $I = \mathbb{R}$!

Anwendungen auf Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Korollar 10.14. *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}$ stetig, lokal Lipschitz.*

(i) Seien $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ Lösungen von

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{$*$}$$

*Falls $\varphi(a) = \psi(a)$, $\varphi'(a) = \psi'(a), \dots, \varphi^{(n-1)}(a) = \psi^{(n-1)}(a)$ für **ein** $a \in I$, dann*

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \forall x \in I.$$

(ii) Ist $(a, c_0, \dots, c_{n-1}) \in G$, so $\exists \varepsilon > 0$ und $\exists$ Lösung

$$\varphi : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \to \mathbb{R}$$

der Dgl. $(*)$ mit Anfangsbedingung

$$\varphi(a) = c_0, \varphi'(a) = c_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(a) = c_{n-1}.$$

Beweis. 10.9, 10.11 und „Reduktion auf System erster Ordnung". (Details $\boxed{\text{Ü}}$!). $\square$

Bemerkung 10.15. *Um Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ von Dgl. n-ter Ordnung festzulegen, muss man φ **und alle** Ableitungen bis zur Ordnung $\leq n - 1$ in einem Punkt $a \in I$ festlegen!*

11 Elementare Lösungsmethoden

Differentialgleichung mit getrennten Variablen

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad g : J \to \mathbb{R}$$

beide stetig mit $g(y) \neq 0 \; \forall y \in J$. Die Dgl.

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{in} \;\; I \times J \tag{1}$$

heißt *Dgl. mit getrennten Variablen*.

Satz 11.1. *Obige Bezeichnungen seien beibehalten. Sei $(x_0, y_0) \in I \times J$. Definiere $F : I \to \mathbb{R}$, $G : J \to \mathbb{R}$ durch*

$$F(x) := \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt, \;\; x \in I, \quad G(y) := \int\limits_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\, dt, \;\; y \in J.$$

Es existiere *$I' \subset I$ Intervall mit: $x_0 \in I'$, $F(I') \subset G(J)$. Dann $\exists$ genau eine Lösung $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ von (1) mit $\varphi(x_0) = y_0$. φ erfüllt*

$$G(\varphi(x)) = F(x) \quad \forall x \in I'. \tag{2}$$

Beweis. Der Beweis geht in 3 Schritten.

Beh. 1. Ist $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ Lösung von (1) mit $\varphi(x_0) = y_0$, so gilt (2).

Beweis.

$$\begin{aligned}
& \varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x)) \quad \forall x \in I' \\
\Rightarrow \quad & \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\, dt = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt \quad \forall x \in I' \\
& \qquad\quad \| \quad \text{, da } \; y_0 = \varphi(x_0) \;\; ! \\
& \int\limits_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(u)}\, du \\
\Rightarrow \quad & G(\varphi(x)) = F(x) \quad \forall x \in I'.
\end{aligned}$$

□

Beh. 2. Lösung $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ von (1) mit $\varphi(x_0) = y_0$ ist eindeutig.

Beweis. Da $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0 \; \forall y \in J$, und J Intervall und G' stetig, gilt entweder $G' > 0$ auf J oder $G' < 0$ auf J, also G streng monoton. Da G stetig diff.bar, $\exists$ stetig diff.bare Umkehrfunktion

$$H : G(J) \to \mathbb{R}.$$

Da φ nach Beh. 1 (2) erfüllt, folgt

$$\varphi(x) = H(F(x)) \quad \forall x \in I'. \tag{3}$$

Somit ist φ eindeutig bestimmt. □

Beh. 3. $\exists$ Lösung $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ von (2) mit $\varphi(x_0) = y_0$.

Beweis. Definiere $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ mittels (3). Dann φ stetig diff.bar (da H, F stetig diff.bar), und

$$\varphi(x_0) = H(\underbrace{F(x_0)}_{=0}) = H(\underbrace{0}_{=G(y_0)}) = H(G(y_0)) = y_0.$$

Weiter folgt aus (3)

$$G(\varphi(x)) = F(x) \quad \forall x \in I'.$$

Differentiation nach x ergibt $\forall x \in I'$

$$\begin{array}{rcl} G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) & = & F'(x) \\ \| & & \| \\ \dfrac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} & & f(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x)) \quad \forall x \in I'.$$

□

□

Bemerkung 11.2. *Statt mit 11.1 (1)* ***immer****, wie folgt lösen: Sei* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *Lösung von (1) mit* $\varphi(x_0) = y_0$*. Dann* $\forall x \in I$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x)g(\varphi(x)) \underset{\substack{g\neq 0\\ auf\, I}}{\Rightarrow} \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))}\, dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(y)}\, dy = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx.$$

Löse dann letzte Gleichung nach $\varphi(x)$ *auf und checke, dass* φ *Lösung von (1) und wähle dabei* I *maximal. 11.1 sagt, dass solche* I, φ ***immer*** *existieren.*

Beispiel 11.3. Betrachte Dgl.

$$y' = y^2 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2. \tag{$*$}$$

Suche Lösung φ mit $\varphi(0) = c$, $c \in \mathbb{R}$ fest. Da Lipschitz-Bedingung erfüllt, gilt Eindeutigkeitssatz 10.9!

1. **Fall 1.** $c = 0$.
   Lösung $\varphi \equiv 0$.
2. **Fall 2.** $c > 0$.
   Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ Lösung von $(*)$ mit $\varphi(0) = c > 0$ auf Intervall I mit $0 \in I$. Dann $\varphi > 0$ auf I (denn sonst $\exists x_1 \in I$ mit $\varphi(x_1) = 0$ und daher nach 10.9 $\varphi \equiv 0$). Können also $(*)$ auf $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ einschränken. Mit Bezeichnungen von 11.1 ist hier

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ & f(x) = 1, \\ g :]0,\infty[\to \mathbb{R},\ & g(y) = y^2, \\ F(x) &= \int_0^x dt = x, \\ G(y) &= \int_c^y \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_c^y = \frac{1}{c} - \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

   Es gilt $G(]0,\infty[) = \left]-\infty, \frac{1}{c}\right[$. Somit $I' := \left]-\infty, \frac{1}{c}\right[$ das maximale Intervall mit $F(I') \subset G(]0,\infty[)$. Für die nach 11.1 existierende, eindeutige Lösung φ von $(*)$ auf $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ mit $\varphi(0) = c$ gilt (2), also $\forall x \in I'$

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{\varphi(x)} = x, \quad \text{d.h.: } \varphi(x) = \frac{c}{1-cx}.$$

3. **Fall 3.** $c < 0$.
   Analog Fall 2 erhält man Lösung

$$\varphi(x) = \frac{c}{1 - cx} \quad \forall x \in \left]\frac{1}{c}, \infty\right[.$$

Beachte: Für $c \neq 0$ lassen sich Lösungen **nicht** auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen. ($\boxed{\text{Ü}}$: Löse $(*)$ (schneller!) mit 11.2!)

Lineare Differentialgleichungen

Satz 11.4. *Sei $I \subset \mathbb{R}$, Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann $\forall x_0 \in I$ und $\forall c \in \mathbb{R}$ $\exists$ genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der Dgl.*

$$y' = a(x)y + b(x)$$

mit Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = c$, nämlich

$$\varphi(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}\left(c + \int\limits_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} a(\tilde{t})\,d\tilde{t}}\, b(t)\,dt\right) \quad \forall x \in I.$$

(Sogar $\forall x \in \mathbb{R}$ definiert!)

Beweis. Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ diff.bar mit $\varphi(x_0) = c$ und

$$\begin{aligned}
& \varphi'(x) = a(x)\varphi(x) + b(x) \quad \forall x \in I \\
\Leftrightarrow \quad & \underbrace{e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}\Big(\varphi'(x) - a(x)\varphi(x)\Big)}_{\left\| \atop \left(e^{-\int_{x_0}^{\cdot} a(t)\,dt}\varphi\right)'(x)\right.} = \underbrace{e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}}_{\neq 0\ !} b(x) \quad \forall x \in I \qquad \text{und} \quad \varphi(x_0) = c \\
\underset{\substack{\text{Fundamental-}\\\text{satz der Diff.-}\\\text{und Int.rechnung}}}{\Leftrightarrow} \quad & e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}\varphi(x) - \underbrace{\varphi(x_0)}_{=c} = \int\limits_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} a(\tilde{t})\,d\tilde{t}}\, b(t)\,dt \quad \forall x \in I \\
\Leftrightarrow \quad & \varphi(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}\left(c + \int\limits_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} a(\tilde{t})\,d\tilde{t}}\, b(t)\,dt\right) \quad \forall x \in I.
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiele 11.5. (i) Eindeutige Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y' = ky$ mit $\varphi(x_0) = c$, $k, c \in \mathbb{R}$ fest, ist

$$\varphi(x) = ce^{k(x-x_0)}.$$

(ii) Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y' = 2xy + x^3$ mit $\varphi(0) = c$, $c \in \mathbb{R}$ fest, ist

$$\varphi(x) = e^{x^2}\Big(c + \underbrace{\int_0^x e^{-t^2} t^3 \, dt}_{= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}}\Big) = \big(c + \frac{1}{2}\big)e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2+1).$$

Die Differentialgleichung $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Sei $J \subset \mathbb{R}$, Intervall, $f : J \to \mathbb{R}$ stetig und

$$G := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{y}{x} \in J \right\}.$$

Dann heißt

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad (x,y) \in G, \tag{4}$$

homogene Differentialgleichung. Betrachte außerdem Dgl.

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z), \quad (x,z) \in \mathbb{R}^* \times J. \tag{5}$$

Satz 11.6. *Seien obige Bezeichnungen beibehalten. Sei $I \subset \mathbb{R}^*$ Intervall und $(x_0, y_0) \in G$ mit $x_0 \in I$. Dann $\varphi : I \to \mathbb{R}$ genau dann Lösung von (4) mit $\varphi(x_0) = y_0$, wenn*

$$\psi : I \to \mathbb{R}, \quad \psi(x) := \frac{\varphi(x)}{x}, \quad x \in I,$$

Lösung von (5) ist mit $\psi(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei φ Lösung von (4) mit $\varphi(x_0) = y_0$.
Dann

$$\psi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2} \underset{(4)}{=} \frac{1}{x}\Big(f\big(\frac{\varphi(x)}{x}\big) - \psi(x)\Big) \quad \forall x \in I,$$

d.h.: ψ löst (5). Außerdem $\psi(x_0) = \frac{\varphi(x_0)}{x_0} = \frac{y_0}{x_0}$.
„$\Leftarrow$“: Sei ψ Lösung von (5) mit $\psi(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$.
Dann

$$\begin{aligned}\varphi'(x) = \big(x\psi(x)\big)' &= \psi(x) + x\psi'(x)\\ &\underset{(5)}{=} \psi(x) + f(\psi(x)) - \psi(x) = f\Big(\frac{\varphi(x)}{x}\Big) \quad \forall x \in I,\end{aligned}$$

d.h.: φ löst (4). Außerdem $\varphi(x_0) = x_0\psi(x_0) = y_0$. $\square$

Bemerkung 11.7. *11.6 ist* ***rigorose*** *Version des folgenden* ***heuristischen*** *„Schnellverfahrens“ zur Lösung von (4):*
(4) geht durch Substitution $z = \frac{y}{x}$ in (5) über, denn:

$$\begin{aligned} z = \frac{y}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad y = xz \quad \Leftrightarrow \quad y' = z + xz' \underset{(4)}{=} f(z)\\ &\Leftrightarrow \quad z' = \frac{1}{x}\big(f(z) - z\big).\end{aligned}$$

Löse dann diese Dgl. und ***beweise****, dass dann $y := xz$ Lösung von (4) und finde dabei* ***maximales*** *Intervall I für Lösung.*

Beispiel 11.8. $y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2$ in $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ geht durch Substitution $z = \frac{y}{x}$ über in

$$z' = \frac{1}{x}(1 + z^2),$$

d.h.:

$$\frac{dz}{1 + z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Für Lösung davon mit $z(x_0) = z_0 = \frac{y_0}{x_0}$ gilt

$$\arctan z - \arctan z_0 = \ln \frac{x}{x_0},$$

d.h.: $z = \tan\left(\ln \frac{x}{x_0} + \alpha\right)$ mit $\alpha := \arctan \frac{y_0}{x_0}$.
Ursprüngliche Dgl. wird dann gelöst von

$$y = x \tan\left(\ln \frac{x}{x_0} + \alpha\right)$$

definiert in **kleiner** Umgebung von x_0.
(Beweisen! $\boxed{\text{Ü}}$! Finde auch „maximale Umgebung von x_0“ !)

Die Differentialgleichung $y'' = f(y)$

Umbenennung: $x \rightsquigarrow t$, $y \rightsquigarrow x$, also betrachten

$$x'' = f(x) \quad (\text{ mit } x''(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)\ ). \tag{6}$$

(Physikalisch interpretiert stellt x'' die Beschleunigung eines Punktteilchens $x(t)$ in $\mathbb{R}$ und $f(x)$ die Kraft in x da.)
Hierbei $f : J \to \mathbb{R}$, stetig, $J \subset \mathbb{R}$, Intervall. Definiere $U : J \to \mathbb{R}$ durch

$$U(x) := -\int_a^x f(\xi)\, d\xi, \quad x \in J, \quad (\text{„Energie“})$$

wobei $a \in J$ beliebig, aber fest. Dann (6) $\Leftrightarrow$

$$x''(t) = -\frac{dU}{dx}\big(x(t)\big). \tag{7}$$

Sei $x = x(t)$ Lösung von (7), dann

$$\begin{aligned} &\underbrace{x'(t)x''(t) + x'(t)\frac{dU}{dx}\big(x(t)\big)}_{} = 0 \\ &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\big(x'(t)\big)^2 + U\big(x(t)\big)\Big) \\ \Rightarrow\quad & \frac{1}{2}\big(x'(t)\big)^2 + U\big(x(t)\big) = \text{const.} =: E. \\ \Rightarrow\quad & x'(t) = \pm\sqrt{2E - U\big(x(t)\big)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Wende nun 11.1 an: Sei $J_0 \subset J$, Intervall mit $U(\xi) < E\ \forall \xi \in J_0$ und $x_0 \in J$. Definiere

$$G(x) := \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}}\ , \quad x \in J_0.$$

Nach 11.1 folgt für Lösung von (8) mit „+“ und Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ ($f = 1 \Rightarrow F(t) = t - t_0$)

$$G\big(x(t)\big) = t - t_0, \quad \text{falls } t - t_0 \in G(J_0)$$

(Also $G(x)$ = Zeit, die Teilchen braucht, um von x_0 nach x zu gelangen!) oder

$$x(t) = H(t - t_0),$$

wobei H = Umkehrfunktion von G. In konkreten Fällen kann man für „gute“ f die Funktion H explizit ausrechnen!

12 Lineare Differentialgleichungen

Definition 12.1. Sei $I \subset \mathbb{R}$, Intervall und $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} : I \to M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ stetig $\forall 1 \leq i, j \leq n$. Dann heißt

$$y' = A(x)y \tag{1}$$

homogenes lineares Differentialgleichungssystem (oder kurz *homogene lineare Dgl.*). Weiter sei

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$$

stetig. Dann heißt

$$y' = A(x)y + b(x) \tag{2}$$

inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem. (1) (mit gleichem A wie (2)) heißt zu (2) gehörige homogene lineare Dgl.

Analog 12.1 betrachtet man komplex-lineare Dgl., d.h. (1), (2) mit $A : I \to M(n \times n, \mathbb{C})$, $b : I \to \mathbb{C}^n$ stetig. Eine Lösung ist dann **diff.bares** $\varphi : I \to \mathbb{C}^n \ \ (= \mathbb{R}^{2n})$ mit

$$\varphi'(x) = A(x)\varphi(x) + b(x), \quad \forall x \in I.$$

Also ist System von n komplexen Dgl. äquivalent zu $2n$ reellen Dgl. (Variable x weiterhin **reell**!)

Im folgenden $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Satz 12.2. *$I \subset \mathbb{R}$, offenes Intervall und*

$$A : I \to M(n \times n, \mathbb{K}), \quad b : I \to \mathbb{K}^n$$

stetig. Dann $\forall x_0 \in I$, $c \in \mathbb{K}^n$ $\exists$ genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ der linearen Dgl.

$$y' = A(x)y + b(x)$$

mit Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = c$.

Beweis. Setze

$$f(x,y) := A(x)y + b(x), \quad (x,y) \in I \times \mathbb{K}^n.$$

Sei $J \subset I$ kompaktes Intervall mit $x_0 \in J$.
Zeige: f ist auf $J \times \mathbb{K}^n$ (global) Lipschitz.
Da A stetig, gilt

$$L := \sup\left\{\|A(x)\| \;\middle|\; x \in J\right\} < \infty.$$

Somit $\forall x \in J, y, \tilde{y} \in \mathbb{K}^n$

$$\|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\| = \|A(x)(y-\tilde{y})\| \leq L\|y-\tilde{y}\|. \tag{$*$}$$

Also ist nach 10.9 Lösung φ eindeutig. Nach 10.11 **gibt es** lokal um x_0 eine Lösung. Aber darüberhinaus:
Beh. $\exists$ Lösung φ auf ganz J.

Beweis. (Picard-Lindelöfsche Approximationsverfahren). Sei $\varphi_0(x) := c \;\forall x \in J$,

$$\varphi_{k+1}(x) := c + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_k(t))\, dt \quad \forall x \in J, \;\; k \in \mathbb{N}. \tag{$**$}$$

Sei $K := \sup\left\{\|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\| \;\middle|\; x \in J\right\}$. Dann:

$$\|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\| \leq K \frac{L^k |x-x_0|^k}{k!} \quad \forall x \in J, \;\; k \in \mathbb{N},$$

denn:
$k = 0$: $\checkmark$
$k \mapsto k+1$: $\forall x \in J$ (wegen $(*)$)

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\| &\underset{(*)}{\leq} \int\limits_{\min(x,x_0)}^{\max(x,x_0)} L \underbrace{\|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)\|}_{\underset{(\mathrm{IV})}{\leq} \frac{K}{(k-1)!} L^{k-1} |t-x_0|^{k-1}} dt \\
&\leq \frac{KL^k}{(k-1)!} \frac{1}{k} |t-x_0|^k \Big|_{\min(x,x_0)}^{\max(x,x_0)} \\
&\leq \frac{KL^k}{k!} |x-x_0|^k.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_J \leq K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k}{k!} \Big(\sup_{x\in J} |x-x_0|\Big)^k < \infty$$

(Dabei bezeichnet $\| \ \|_J$ die sup-Norm auf J.)

$$\Rightarrow \quad \varphi_N = c + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\varphi_{k+1} - \varphi_k\right), \quad N \in \mathbb{N},$$

gleichmäßig konvergent auf J. Sei $\varphi := \lim \varphi_N$. Geht man also in $(**)$ zum Limes über, erhält man φ ist Lösung auf ganz J. $\square$

Da J beliebiges kompaktes Intervall in I und wegen Eindeutigkeitssatz, erhält man Lösung auf ganz I. $\square$

Satz 12.3. *Sei $I \subset \mathbb{R}$, Intervall, $A : I \to M(n \times n, \mathbb{K})$ stetig. Sei L_H die Menge* ***aller*** *Lösungen $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ der homogenen linearen Dgl.*

$$y' = A(x)y.$$

Dann ist L_H n-dimensionaler linearer Vektorraum über $\mathbb{K}$. Für $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in L_H$ sind äquivalent:

(i) *$\varphi_1, \dots, \varphi_k$ linear unabhängig über $\mathbb{K}$.*

(ii) *$\exists x_0 \in I$: $\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_k(x_0) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig über $\mathbb{K}$.*

(iii) *$\forall x_0 \in I$: $\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_k(x_0) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig über $\mathbb{K}$.*

Beweis. $0 \in L_H$ ✓
$\varphi, \psi \in L_H, \lambda \in \mathbb{K}$
$\Rightarrow (\varphi + \lambda\psi)' = \varphi' + \lambda\psi' = A\varphi + \lambda A\psi = A(\varphi + \lambda\psi)$
$\Rightarrow \varphi + \lambda\psi \in L_H$
$\Rrightarrow L_H$ linearer Vektorraum über $\mathbb{K}$.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i): Trivial! Ü
(i) $\Rightarrow$ (iii): Es gelte (i): Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in L_H$ linear unabhängig und $x_0 \in I$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ mit

$$\lambda_1\varphi_1(x_0) + \cdots + \lambda_k\varphi_k(x_0) = 0.$$

Setze

$$\varphi := \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_k\varphi_k \in L_H.$$

Da $\varphi(x_0) = 0$, gilt nach 12.2 $\varphi \equiv 0$. Also nach (i) $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.
Zeige: $\dim L_H = n$.
Sei $e_i := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te}}, 0, \dots, 0)$, $1 \leq i \leq n$. Nach 12.2 $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_H$ mit $\varphi_i(x_0) = e_i$. Nach oben $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig, also $\dim L_H \geq n$. Andererseits $\dim L_H \leq n$, denn sonst $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1} \in L_H$ linear unabhängig, also nach oben $\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_{n+1}(x_0) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig. ↯ $\square$

Definition 12.4. *Lösungs-Fundamentalsystem* der Dgl. $y' = A(x)y$ ist Basis $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ von zugehörigem L_H.

Schreibe

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{1i} \\ \vdots \\ \varphi_{ni} \end{pmatrix} \quad , \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{dann:} \quad \Phi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

$n \times n$ Matrix. Nach 12.3 sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_H$ genau dann linear unabhängig, falls

$$\det \Phi(x_0) \neq 0 \quad \text{für } \textbf{ein } x_0 \in I, \text{damit } \forall x_0 \in I.$$

Ist $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ Lösungs-Fundamentalsystem der Dgl. $y' = A(x)y$, so gilt für beliebiges $\varphi \in L_H$

$$\varphi = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$$

für gewisse $c_i \in \mathbb{K}$, oder

$$\varphi = \Phi c \quad \text{mit} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad .$$

Beachte

$$\Phi' = (\varphi_1', \dots, \varphi_n') = (A\varphi_1, \dots, A\varphi_n) = A \cdot \Phi.$$

Beispiel 12.5. Sei $\omega \in \mathbb{R}$ fest.

$$\begin{aligned} y_1' &= -\omega y_2 \\ y_2' &= \omega y_1 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad .$$

Lösungen: $\varphi_1(x) := \begin{pmatrix} \cos \omega x \\ \sin \omega x \end{pmatrix}$, $\varphi_2(x) := \begin{pmatrix} -\sin \omega x \\ \cos \omega x \end{pmatrix}$. (Check! $\boxed{\text{Ü}}$!)
Lösungs-Fundamentalsystem

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos \omega x & -\sin \omega x \\ \sin \omega x & \cos \omega x \end{pmatrix} \quad ,$$

denn $\det \Phi(x) = 1 \; \forall x$.

Inhomogene Gleichungen

Satz 12.6. *$I \subset \mathbb{R}$, Intervall, $A : I \to M(n \times n, \mathbb{K})$, $b : I \to \mathbb{K}^n$, beide stetig. Bezeichne L_H Vektorraum aller Lösungen von $y' = A(x)y$ und L_I die Menge aller Lösungen $\psi : I \to \mathbb{K}^n$ der inhomogenen linearen Dgl. $y' = A(x)y + b(x)$. Dann gilt für beliebiges $\psi_0 \in L_I$*

$$L_I = \psi_0 + L_H.$$

Beweis. (Lineare Algebra!). „$\subset$": Sei $\psi \in L_I$.
Setze $\varphi := \psi - \psi_0$. Dann $\varphi' = \psi' - \psi_0' = (A\psi + b) - (A\psi_0 + b) = A(\psi_0 - \psi) = A\varphi \Rightarrow \varphi \in L_H \Rightarrow \psi = \psi_0 + \varphi \in \psi_0 + L_H$.
„$\supset$": Sei $\psi \in \psi_0 + L_H$.
Dann $\exists \varphi \in L_H$ mit $\psi = \psi_0 + \varphi \Rightarrow \psi' = \psi_0' + \varphi' = (A\psi_0 + b) + A\varphi \underset{\psi=\psi_0+\varphi}{=} A\psi + b \Rightarrow \psi \in L_I$. □

Satz 12.7 („Variation der Konstanten"). *Betrachte Situation von 12.6, und sei $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ Lösungs-Fundamentalsystem von*

$$y' = A(x)y.$$

Dann ist $\psi(x) := \Phi(x)u(x)$, $x \in I$, Lösung von

$$y' = A(x)y + b(x),$$

wobei

$$u(x) := \int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1} b(t)\, dt + \underbrace{\text{const.}}_{=\text{Vektor!}}, \quad x \in I,$$

mit $x_0 \in I$ fest.

Beweis. Es gilt $\psi' = (\Phi u)' = \Phi' u + \Phi u' \underset{\Phi'=A\cdot\Phi}{=} A \cdot \Phi u + b = A\psi + b$. □

Beispiel 12.8. Betrachte

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 + x \end{cases} \quad \text{oder äquiv. dazu} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Nach 12.5 ist

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Lösungs-Fundamentalsystem von zugehöriger homogenen Dgl. Weiterhin

$$\Phi(x)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad ,$$

also

$$\Phi(x)^{-1}b(x) = \begin{pmatrix} x\sin x \\ x\cos x \end{pmatrix} \quad ,$$

somit

$$\begin{aligned} u(x) &= \int\limits_0^x \begin{pmatrix} t\sin t \\ t\cos t \end{pmatrix} \, dt + \text{const.} \\ &\underset{\substack{\text{part.}\\ \text{Int.}}}{=} \begin{pmatrix} \sin x - x\cos x \\ \cos x + x\sin x \end{pmatrix} + \underbrace{\text{const.}}_{\text{jetzt z.B.} = 0 \text{ wählen}} \end{aligned}$$

$\underset{12.7}{\Rrightarrow} \psi(x) = \Phi(x)u(x) = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}$ ist spezielle Lösung von $(*)$. Nach 12.6 ist **allgemeine** Lösung von $(*)$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Definition 12.9. $I \subset \mathbb{R}$, Intervall, $a_k : I \to \mathbb{K}$, $0 \leq k \leq n-1$, stetig. Dann heißt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{3}$$

homogene lineare Dgl. n-ter Ordnung. Ist $b : I \to \mathbb{K}$ stetig, so heißt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{4}$$

inhomogene lineare Dgl. n-ter Ordnung. (3) heißt die zu (4) zugehörige homogene Gleichung.

Satz 12.10. *Obige Bezeichnungen seien beibehalten.*

(i) Sei L_H Menge ***aller*** *Lösungen $\varphi : I \to \mathbb{K}$ von (3). Dann ist L_H n-dimensionaler linearer Vektorraum.*

(ii) *Sei L_I Menge **aller** Lösungen $\psi : I \to \mathbb{K}$ von (4). Dann $\forall \psi_0 \in L_I$: $L_I = \psi_0 + L_H$.*

(iii) *$\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_H$ sind genau dann linear unabhängig, falls für ein und damit alle $x \in I$ die „Wronski-Determinante“*

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Beweis.

$$(4) \underset{\substack{\text{vgl. Kap. 10} \\ \text{(insbes. Formel (4))}}}{\Leftrightarrow} (5) \begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \quad\vdots \\ y_{n-2}' = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = -a_0(x)y_0 - a_1(x)y_1 - \cdots - a_{n-1}(x)y_{n-1} + b(x), \end{cases}$$

d.h. genauer: jeder Lösung $\varphi : I \to \mathbb{K}$ von (4) entspricht Lösung

$$f := \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} : I \to \mathbb{K}^n$$

von (5) und umgekehrt, insbes. genauso für Fall $b \equiv 0$.
$\underset{12.3,12.6}{\Rrightarrow}$ Beh. ☐

Definition 12.11. Basis von L_H der Dgl. (3) heißt *Lösungs-Fundamentalsystem*.

Beispiel 12.12. Dgl.

$$y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{2x^2}y = 0 \qquad (*)$$

hat auf $I :=]0, \infty[$ Lösungen $\varphi_1(x) := x$, $\varphi_2(x) := \sqrt{x}$. (Check! $\boxed{\text{Ü}}$!)
Zugehörige Wronski-Determinante

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & \sqrt{x} \\ 1 & \frac{1}{2}x^{-1/2} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{x}}{2} \neq 0$$

$\forall x \in I$, somit (φ_1, φ_2) Lösungs-Fundamentalsystem. Allgemeine Lösung der **homogenen** Dgl. $(*)$ also

$$\varphi(x) = c_1 x + c_2\sqrt{x}, \quad x \in I, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{K}.$$

Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Drei Beispiele mit polynomialen Lösungen: Sei $n \in \mathbb{N}$.

$$\textit{Legendre Dgl.}\quad \underbrace{(1-x^2)}_{\neq 0 \text{ auf } I!\text{ Also per Division vom Typ (3).}} y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad x \in I :=]-1,1[, \tag{6}$$

$$\textit{Hermitesche Dgl.}\quad y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad x \in I := \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$\textit{Laguerre Dgl.}\quad xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \quad x \in I :=]0,\infty[. \tag{8}$$

Spezielle Lösungen:

$$\text{zu (6):}\quad P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n (x^2-1)^n \quad \textit{„Legendre-Polynome“},$$

$$\text{zu (7):}\quad H_n(x) := (-1)^n e^{x^2}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n e^{-x^2} \quad \textit{„Hermite-Polynome“},$$

$$\text{zu (8):}\quad L_n(x) := e^x\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n \big(x^n e^{-x}\big) \quad \textit{„Laguerre-Polynome“}.$$

Tatsächlich Polynome! (*Beweis.* Induktion über n, $\boxed{\text{Ü}}$!). Tatsächlich Lösungen! ($\boxed{\text{Ü}}$! Vgl. [For99] bzgl. (6), (7)). Aber somit jeweils **nur eine** bekannt. Nach 12.3 brauchen wir **zweite linear unabhängige Lösung**. **Dazu**:

Reduktion der Ordnung

Satz 12.13. *Sei $I \subset \mathbb{R}$, Intervall, $a, b : I \to \mathbb{K}$ stetig. Sei $\varphi : I \to \mathbb{K}$ Lösung von*

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0. \tag{9}$$

Sei $J \subset I$, Intervall mit $\varphi(x) \neq 0\ \forall x \in J$. Dann

$$\psi(x) := u(x)\varphi(x), \quad x \in J, \quad (\text{„Variation der Konstanten“})$$

*Lösung von (9), linear unabhängig von φ, wobei u **nicht konstante** Lösung von Dgl.*

$$u'' + \Big(2\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + a(x)\Big)u' = 0 \tag{10}$$

d.h. nach 11.4:

$$\begin{aligned} u'(x) &= ce^{-\int_{x_0}^x \left(2\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} + a(t)\right)\,dt} \\ &= c\frac{\varphi(x_0)^2}{\varphi(x)^2} e^{-\int_{x_0}^x a(t)\,dt}, \quad x \in J, \end{aligned} \tag{11}$$

wobei $x_0 \in J$, $c \in \mathbb{K}$. *(Beachte:* $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = (\ln \varphi)'(t)$.*)*

Beweis.

$$\begin{aligned}
\psi = \varphi u \quad \Rightarrow \quad \psi' &= \varphi' u + \varphi u' \\
\Rightarrow \quad \psi'' &= \varphi'' u + 2\varphi' u' + \varphi u'' \\
&\underset{(9)}{=} (-a\varphi' - b\varphi) u + 2\varphi' u' + \varphi u''.
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\psi'' + a\psi' + b\psi \underset{\psi = \varphi u}{=} & -a\varphi' u - b\psi + 2\varphi' u' + \varphi u'' \\
& + a\varphi' u + a\varphi u' + b\psi \\
= \; & \varphi u'' + (2\varphi' + a\varphi) u'.
\end{aligned}$$

Somit:

$$\psi \text{ löst (9) auf } J \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ löst (10) auf } J.$$

Ist u also nicht-konstant, so ist $\psi = \varphi u$ linear unabhängig von φ auf J. □

Beispiel 12.14. Für $n = 1$ lautet (6)

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{2}{1-x^2} y = 0, \quad x \in I :=]-1, 1[. \tag{$*$}$$

Eine spezielle Lösung ist: $\varphi(x) := P_1(x) = x$, $x \in]-1, 1[$. Somit nach 12.13 zweite linear unabhängige Lösung auf $J :=]0, 1[$.

$$\psi(x) := x u(x), \quad x \in J,$$

mit z.B.

$$\begin{aligned}
u'(x) &\underset{(11)}{=} \text{const.}\, \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1-x^2}\, dx} = \text{const.}\, \frac{1}{x^2} e^{-\ln(1-x^2)} \\
&= \text{const.}\, \frac{1}{x^2(1-x^2)} \underset{\substack{\text{Partial-} \\ \text{bruchzerlegung}}}{=} \text{const.} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) \right).
\end{aligned}$$

Wähle const. $= 1$ und erhalte

$$u(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \underbrace{\text{const.}}_{\text{Wähle} = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \psi(x) = x u(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1, \quad x \in J.$$

Aber ψ auf ganz I definiert und löst $(*)$ auf ganz I (Check! $\boxed{\text{Ü}}$!). Somit (da ψ unabhängig von φ) allgemeine Lösung der homogenen Dgl. $(*)$ auf I

$$y(x) = c_1 x + c_2\Big(\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1\Big)\,, \quad x \in I, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 12.15. *Nicht immer Lösung einer (linearen) Dgl. durch* ***elementare Funktionen*** *ausdrückbar. Oft findet man neue* ***transzendente*** *Funktionen. Z.B.:*

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \Big(1 - \frac{p^2}{x^2}\Big)y = 0, \quad x \in]0,\infty[, \quad \text{„Bessel Dgl.“},$$

p reeller Parameter. Lösungen heißen Zylinderfunktionen der Ordnung *p. Spezielle Basis gegeben durch* Bessel-Funktion *p-ter Ordnung J_p,* Neumann-Funktion *p-ter Ordnung N_p (vgl. Standard Tafelwerke höherer Funktionen bzw.* [For99] *bzgl. J_0, N_0.).*

13 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Polynome von Differentialoperatoren

Sei $\mathbb{C}[T]$ Menge aller Polynome

$$P(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T^n$$

mit komplexen Koeffizienten a_k, $0 \leq k \leq n$, in Unbestimmter T. Ersetzt man Unbestimmte T durch $D := \frac{d}{dx}$, erhält man *Differentialoperator* (linear!)

$$P(D) = a_0 + a_1 D + \cdots + a_n D^n,$$

d.h. (lineare) Abbildung, die n-mal diff.barem $f : I \to \mathbb{C}$ (mit $I \subset \mathbb{R}$, Intervall) die Funktion $P(D)f : I \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$P(D)f := a_0 f + a_1 Df + \cdots + a_n D^n f$$

zuordnet. Dann homogene lineare Dgl. n-ter Ordnung mit **konstanten** Koeffizienten

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

(mit $a_n \neq 0$) schreibbar als

$$P(D)y = 0. \tag{1}$$

Lemma 13.1. *Sei* $P_1(T) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i T^i, P_2(T) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j T^j \in \mathbb{C}[T]$. *Setze*

$$P(T) := P_1(T) + P_2(T), \quad Q(T) := P_1(T) \cdot P_2(T).$$

Dann $\forall f : I \to \mathbb{C}$, f *hinreichend oft diff.bar:*

(i) $P(D)f = P_1(D)f + P_2(D)f$.

(ii) $Q(D)f = P_1(D)\big(P_2(D)f\big) = P_2(D)\big(P_1(D)f\big)$.

Beweis. Œ: $m = n$ (falls z.B. $m < n$, setze $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$).

(i): Es gilt:

$$P(T) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) T^i,$$

also

$$P(D)f = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) D^i f = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i f + \sum_{i=0}^{n} b_i D^i f = P_1(D)f + P_2(D)f.$$

(ii): Setze: $a_l = b_l = 0$ für $l \in \mathbb{N}$ mit $l > n$. Dann:

$$Q(T) = \sum_{k=0}^{2n} \underbrace{\Big(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \Big)}_{=:\, c_k} T^k,$$

also

$$Q(D)f = \sum_{k=0}^{2n} c_k D^k f = \sum_{k=0}^{2n} \Bigg(\sum_{\substack{0 \le i,j \le k \\ \text{mit: } i+j=k}} a_i \underbrace{b_j \underbrace{D^{i+j} f}_{= D^i D^j f}}_{= D^i(b_j D^j f),\ \text{ da } b_j \text{ konst.}} \Bigg)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i \Big(\sum_{j=0}^{n} b_j D^j f \Big) = P_1(D)\big(P_2(D)f\big).$$

Da $Q(T) = P_1(T)P_2(T) = P_2(T)P_1(T)$, folgt durch Vertauschung der Rollen von P_1 und P_2 aus obigem Beweis

$$Q(D)f = P_2(D)\big(P_1(D)f\big).$$

□

Bemerkung 13.2. *Dass $P_2(D)\big(P_1(D)f\big) = P_2(D)\big(P_1(D)f\big)$, gilt nur, weil Koeffizienten a_k, b_k* ***alle*** *konstant. Andernfalls falsch!*
Bsp.: *$(L_1 f)(x) := Df(x)$, $(L_2 f)(x) := xDf(x)$. Dann $L_2(L_1 f)(x) = xD^2 f(x) \neq Df(x) + xD^2 f(x) = L_1(L_2 f)(x)$.*

Lemma 13.3 („key 1"). *Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $P(T) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in \mathbb{C}[T]$. Dann:*

$$P(D)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Insbes. $P(\lambda) = 0 \Rightarrow P(D)e^{\lambda x} = 0$, d.h.: $\varphi(x) := e^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$, löst Dgl. (1).

Beweis. Sei $\mu, \omega \in \mathbb{R}$ mit $\lambda = \mu + i\omega$. Dann (da $x \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} D(e^{\lambda x}) &= D(e^{\mu x}(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x))) \\ &= \mu e^{\mu x}(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)) + e^{\mu x}(-\omega\sin(\omega x) + i\omega\cos(\omega x)) \\ &= (\mu + i\omega)e^{\mu x}(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)) = \lambda e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Also

$$P(D)(e^{\lambda x}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \underbrace{D^i(e^{\lambda x})}_{=\lambda^i e^{\lambda x} \text{ (vgl. oben)}} = P(\lambda)e^{\lambda x}.$$

□

Erinnere:

$P(T) \in \mathbb{C}[T] \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$, paarweise verschieden,
$k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit
$P(T) = (T - \lambda_1)^{k_1} \cdots (T - \lambda_r)^{k_r}$.

k_i heißt *Vielfachheit* der Nullstelle λ_i. Klar: $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i = n$.

Lemma 13.4 („key 2"). *Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann $\forall f : I \to \mathbb{C}$ k-mal diff.bar (mit $I \subset \mathbb{R}$, Intervall)*

$$(D - \lambda)^k (f e^{\lambda \cdot}) = f^{(k)} e^{\lambda \cdot}$$

(wobei $e^{\lambda \cdot}$ die Funktion $x \mapsto e^{\lambda x}$ bezeichnet).

Beweis. Induktion über k:
$k = 0$: $\surd$
$k - 1 \mapsto k$:

$$\begin{aligned} &(D - \lambda)^k (f e^{\lambda \cdot}) = (D - \lambda)(D - \lambda)^{k-1}(f e^{\lambda \cdot}) \\ \underset{\text{(IV)}}{=}\, &(D - \lambda)(f^{(k-1)} e^{\lambda \cdot}) = f^{(k)} e^{\lambda \cdot} + f^{(k-1)} \lambda e^{\lambda \cdot} - \lambda f^{(k-1)} e^{\lambda \cdot} \\ =\, &f^{(k)} e^{\lambda \cdot}. \end{aligned}$$

□

Lemma 13.5. *Sei $P(T) \in \mathbb{C}[T]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $P(\lambda) \neq 0$. Falls $g : I \to \mathbb{C}$ Polynomfunktion vom Grad k, so gilt*

$$P(D)(g e^{\lambda \cdot}) = h e^{\lambda \cdot},$$

wobei $h : I \to \mathbb{C}$ Polynomfunktion vom Grad k.

Beweis. Ordne $P(T)$ nach Potenzen von $T-\lambda$ um, erhalte

$$P(T) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (T-\lambda)^\nu, \quad c_\nu \in \mathbb{C}. \tag{$*$}$$

Da $P(\lambda) \neq 0$, gilt $c_0 \neq 0$. Nach 13.4 also

$$P(D)(ge^{\lambda\cdot}) \underset{(*)}{=} \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (D-\lambda)^\nu (ge^{\lambda\cdot}) \underset{13.4}{=} \underbrace{\Big(\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu g^{(\nu)}\Big)}_{=:\,h} e^{\lambda\cdot}.$$

Klar, dass h Polynomfunktion. Wegen $c_0 \neq 0$ ist h wieder vom Grad k. $\square$

Satz 13.6. *Sei*

$$P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0 \in \mathbb{C}[T]$$

mit den paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ der zugehörigen Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_r$. Dann ist für

$$P(D)y = 0 \tag{1}$$

*(allgemeinste lineare Dgl. der Ordnung n mit **konstanten** Koeffizienten!)*

$$\varphi_{jm}(x) := x^m e^{\lambda_j x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq r, \quad 0 \leq m \leq k_j - 1,$$

Lösungs-Fundamentalsystem. Hat P insbesondere n verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so ist $\varphi_j = e^{\lambda_j \cdot}$, $1 \leq j \leq n$, Lösungs-Fundamentalsystem.

Beweis. (a) **Zeige:** Alle φ_{jm}, $1 \leq j \leq r$, $0 \leq m \leq k_j - 1$, sind Lösungen von (1).

Es gilt für $1 \leq j \leq r$, $0 \leq m \leq k_j - 1$

$$P(T) = (T-\lambda_j)^{k_j} \underbrace{(T-\lambda_1)^{k_1} \cdots (T-\lambda_{j-1})^{k_{j-1}} (T-\lambda_{j+1})^{k_{j+1}} \cdots (T-\lambda_r)^{k_r}}_{=:\,Q_j(T)},$$

somit

$$\begin{aligned} P(D)\varphi_{jm}(x) &\underset{13.1\,(ii)}{=} Q_j(D)(D-\lambda_j)^{k_j}\varphi_{jm}(x) \\ &\underset{13.4}{=} Q_j(D) \underbrace{\big(D^{k_j} x^m\big)}_{\substack{=0,\text{ da} \\ k_j \geq m+1 > m}} e^{\lambda_j x} = 0 \end{aligned}$$

(b) **Zeige:** φ_{jm}, $1 \le j \le r$, $0 \le m \le k_j - 1$, linear unabhängig.
Seien $c_{jm} \in \mathbb{C}$, $1 \le j \le r$, $0 \le m \le k_j - 1$, mit

$$\psi := \underbrace{\sum_{\substack{1 \le j \le r \\ 0 \le m \le k_j - 1}} c_{jm} \varphi_{jm}}_{} = 0.$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \underbrace{\Big(\sum_{m=0}^{k_j-1} c_{jm} x^m \Big)}_{=: g_j(x), \quad \operatorname{grad} g_j \le k_j - 1 < k_j \ !} e^{\lambda_j x}$$

Beh. $\forall r \in \mathbb{N}$ und $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ gilt: Sind $g_1, \dots, g_r$ Polynomfunktionen mit $\operatorname{grad} g_j < k_j$, $1 \le j \le r$, und $\sum\limits_{j=1}^{r} g_j e^{\lambda_j \cdot} = 0$, dann: $g_1 = \dots = g_r = 0$.

Beweis. Induktion über r:
$r = 1$: $g_1 e^{\lambda_1 \cdot} = 0 \Rightarrow g_1 = 0$ $\surd$
$r - 1 \mapsto r$: Falls

$$\sum_{j=1}^{r} g_j e^{\lambda_j \cdot} = 0, \tag{$*$}$$

dann

$$0 = (D - \lambda_r)^{k_r} \Big(\sum_{j=1}^{r} g_j e^{\lambda_j \cdot} \Big)$$

$$\underset{13.5}{=} \sum_{j=1}^{r-1} \underbrace{h_j}_{\substack{\text{Pol. mit} \\ \operatorname{grad} h_j \\ = \operatorname{grad} g_j < k_j}} e^{\lambda_j \cdot} + \underbrace{(D - \lambda_r)^{k_r} \, (g_r e^{\lambda_r \cdot})}_{\underset{13.4}{=} \underbrace{g_r^{(k_r)}}_{=0, \text{ da } \operatorname{grad} g_r < k_r} e^{\lambda_r \cdot}}$$

$\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{r-1} h_j e^{\lambda_j \cdot} = 0$ und $\operatorname{grad} h_j = \operatorname{grad} g_j < k_j$

$\underset{\text{(IV)}}{\Rightarrow} h_1 = \dots = h_{r-1} = 0$

$\underset{\substack{\operatorname{grad} h_j \\ = \operatorname{grad} g_j \\ \forall 1 \le j \le r-1}}{\Rightarrow} g_1 = \dots = g_{r-1} = 0$. Wegen $(*)$: $g_r e^{\lambda_r \cdot} = 0 \Rightarrow g_r = 0$. □

□

Bemerkung 13.7. *Im Fall $n = r$, also im Fall, dass $P(T)$ n* ***paarweise verschiedene*** *Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hat, kann man die lineare Unabhängigkeit von $e^{\lambda_1 \cdot}, \dots, e^{\lambda_n \cdot}$ auch wie folgt sehen: Die zugehörige Wronski-Determinante $W(x)$ in $x = 0$ lautet:*

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

also „Vandermonde Determinante“, *somit (vgl. Lineare Algebra)*

$$W(0) = \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0.$$

Beispiele 13.8. (i)

$$y''' - y'' - 2y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(D)y = 0,$$

wobei $P(T) = T^3 - T^2 - 2T = T(T+1)(T-2)$. Also nach 13.6

$$\varphi_1(x) := 1, \quad \varphi_2(x) := e^{-x}, \quad \varphi_3(x) := e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ist Lösungs-Fundamentalsystem.

(ii)

$$y^{(4)} + 8y'' + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(D)y = 0,$$

wobei $P(T) = T^4 + 8T^2 + 16 = (T^2+4)^2 = (T-2i)^2(T+2i)^2$. Somit nach 13.6

$$\begin{matrix} \varphi_{10}(x) = e^{2ix}, & \varphi_{11}(x) = xe^{2ix} \\ \varphi_{20}(x) = e^{-2ix}, & \varphi_{21}(x) = xe^{-2ix} \end{matrix} \quad , \quad x \in \mathbb{R},$$

Lösungs-Fundamentalsystem. Durch geeignete Linearkombinationen erhält man **reelles** Lösungs-Fundamentalsystem:

$$\psi_{1m} := \frac{1}{2}(\varphi_{1m} + \varphi_{2m}), \quad \psi_{2m} := \frac{1}{2i}(\varphi_{1m} - \varphi_{2m}), \quad m = 0, 1.$$

Da man diese Gleichungen wieder nach φ_{jm} auflösen kann, bilden auch $\psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{20}, \psi_{21}$ Lösungs-Fundamentalsystem. Es ergibt sich:

$$\begin{matrix} \psi_{10}(x) = \cos(2x), & \psi_{11}(x) = x\cos(2x), \\ \psi_{20}(x) = \sin(2x), & \psi_{21}(x) = x\sin(2x), \end{matrix} \quad x \in \mathbb{R}.$$

(iii) Seien $\mu \in [0, \infty[, \omega_0 \in]0, \infty[$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

„Dgl. der gedämpften Schwingung“ (dabei ist 2μ *„Dämpfungsfaktor“*) bzw. für $\mu = 0$: (d.h.: **keine** Dämpfung) *„Dgl. des harmonischen Oszillators mit Frequenz ω_0“*

$$\Leftrightarrow \quad P(D)x = 0,$$

wobei $P(T) = T^2 + 2\mu T + \omega_0^2 = (T - \lambda_1)(T - \lambda_2)$ mit $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$ $(\in \mathbb{C})$.

1. Fall. $0 \leq \mu < \omega_0$.

Dann $\lambda_{1,2} = -\mu \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}}_{=:\omega \ (\in]0,\infty[)} = -\mu \pm i\omega$ (wirklich komplex, da $\omega \neq 0$!). Also nach 13.6

$$\varphi_1(t) = e^{-\mu t}e^{i\omega t},\ \varphi_2(t) = e^{-\mu t}e^{-i\omega t},\ t \in \mathbb{R},$$

Lösungs-Fundamentalsystem. Daraus gewinnt man reelles Lösungs-Fundamentalsystem (wie unter (ii)): (*„gedämpfte Schwingung“*!)

$$\psi_1(t) = e^{-\mu t}\cos(\omega t), \quad \psi_2(t) = e^{-\mu t}\sin(\omega t), \quad t \in \mathbb{R},$$

($\mu = 0$: **keine** Dämpfung!).

2. Fall. $\mu = \omega_0$.

Dann $\lambda_{1,2} = -\mu$, also Vielfachheit 2. Somit nach 13.6

$$\varphi_1(t) = e^{-\mu t}, \quad \varphi_2(t) = te^{-\mu t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

Lösungs-Fundamentalsystem (**keine** Schwingung mehr!).

3. Fall. $\mu > \omega_0$.

Dann $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \underbrace{\sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}}_{\in]0,\mu[}$ $(\in] - \infty, 0[\ !)$. Also nach 13.6

$$\varphi_1(t) = e^{-|\lambda_1|t}, \quad \varphi_2(t) = e^{-|\lambda_2|t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

Lösungs-Fundamentalsystem (**keine** Schwingung mehr!).

Inhomogener Fall

Sei

$$P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$, $0 \leq k \leq n-1$. Sei $b : I \to \mathbb{C}$ stetig (mit $I \subset \mathbb{R}$, Intervall). Dann wissen wir nach 13.6 und 12.7, 12.10 (ii) (einschließlich Reduktion auf System erster Ordnung), wie man

$$P(D)y = b(x) \tag{2}$$

prinzipiell löst. Für spezielle Klasse von Funktionen b, kann man **spezielle** Lösung von (2) (also was man für 12.10 (ii) braucht) durch einfachen Ansatz finden:

Lemma 13.9. *Sei $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[T]$ und $\mu \in \mathbb{C}$ mit $P(\mu) \neq 0$. Dann hat für $\alpha \in \mathbb{C}$*

$$P(D)y = \alpha e^{\mu x} \tag{$*$}$$

die spezielle Lösung

$$\psi(x) := \frac{\alpha}{P(\mu)} e^{\mu x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Nach 13.3 gilt

$$P(D)\left(\frac{\alpha e^{\mu\cdot}}{P(\mu)}\right) = \frac{\alpha}{P(\mu)} \underbrace{P(D)e^{\mu\cdot}}_{\underset{13.3}{=} P(\mu)e^{\mu\cdot}} = \alpha e^{\mu\cdot}.$$

□

Beispiel 13.10. Bestimme spezielle Lösung von

$$\underbrace{(D^3 - 2D^2 - 2D + 2)}_{=: P(D)} y = 2\sin x \quad (\underset{e^{ix} = \cos x + i \sin x}{=} \operatorname{Re}(-2ie^{ix})). \tag{3}$$

Betrachte (weil einfacher) zunächst:

$$P(D)y = -2ie^{ix}. \tag{4}$$

Da $P(i) = 4 - 3i \neq 0$, ist nach 13.9 spezielle Lösung von (4):

$$\psi(x) := \frac{-2i}{4-3i} e^{ix} = \frac{6-8i}{25} e^{ix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Da alle Koeffizienten von P reell, gilt $\operatorname{Re}(P(D)\psi) = P(D)(\operatorname{Re}\psi)$. Somit hat (3) spezielle Lösung

$$\varphi(x) := \operatorname{Re}\psi(x) = \frac{6}{25}\cos x + \frac{8}{25}\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Satz 13.11. *Sei* $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[T]$, $\mu \in \mathbb{C}$ *Nullstelle von* P k*-ter Ordnung mit* $k \geq 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *Polynomfunktion vom Grad* m*. Dann hat*

$$P(D)y = f(x)e^{\mu x} \tag{5}$$

spezielle *Lösung* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *der Gestalt*

$$\varphi = he^{\mu \cdot},$$

wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *Polynomfunktion vom Grad* $m + k$*.*

Beweis. Nach Voraussetzung $P(T) = (T-\mu)^k Q(T)$, wobei $Q \in \mathbb{C}[T]$ mit $Q(\mu) \neq 0$. Beweise Beh. durch Induktion nach m.
$m = 0$: Dann (5) $\Leftrightarrow P(D)y = ce^{\mu x}$, für ein $c \in \mathbb{C}$ fest. Dann ist

$$\varphi(x) := \frac{c}{k!Q(\mu)} x^k e^{\mu x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

spezielle Lösung, denn:

$$\begin{aligned} P(D)(x^k e^{\mu x}) &\underset{13.1\,\text{(ii)}}{=} Q(D)(D-\mu)^k (x^k e^{\mu x}) \underset{13.4}{=} Q(D)(k! e^{\mu x}) \\ &\underset{13.3}{=} k!Q(\mu)e^{\mu x}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$m - 1 \mapsto m$: Es gilt:

$$P(D)(x^{m+k}e^{\mu x}) \underset{13.1\,\text{(i)}}{=} Q(D)(D-\mu)^k (x^{m+k} e^{\mu x}) \tag{$**$}$$

$$\underset{13.4}{=} Q(D)\Big(\frac{(m+k)!}{m!} x^m e^{\mu x}\Big) \underset{13.5}{=} g(x)e^{\mu x},$$

wobei g Polynomfunktion vom Grad m. Für geeignetes $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist dann $f_1 := f - cg$ Polynomfunktion vom Grad $m - 1$. Nach (IV) $\exists$ Polynomfunktion $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vom Grad $m - 1 + k$ mit

$$P(D)(h_1 e^{\mu \cdot}) = f_1 e^{\mu \cdot}. \tag{$***$}$$

Also ist $h(x) := h_1(x) + cx^{m+k}$, $x \in \mathbb{R}$, Polynomfunktion vom Grad $m + k$ mit

$$\begin{aligned} P(D)(h(x)e^{\mu x}) &= P(D)(h_1(x)e^{\mu x}) + P(D)(cx^{m+k}e^{\mu x}) \\ &\underset{(**),(***)}{=} (f(x) - cg(x))e^{\mu x} + cg(x)e^{\mu x} \\ &= f(x)e^{\mu x}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\square$

Beispiele 13.12. (i) Sei $P(T) = T^3 + 2T^2 + T \in \mathbb{C}[T]$. Wollen lösen

$$P(D)y = x + 2e^{-x}. \tag{6}$$

Da

$$P(T) = (T+1)^2 T, \tag{+}$$

ist

$$\varphi_1(x) := e^{-x},\ \varphi_2(x) := xe^{-x},\ \varphi_3(x) := 1,\ x \in \mathbb{R},$$

Lösungs-Fundamentalsystem von $P(D)y = 0$. Um **spezielle** Lösung von (6) zu finden, betrachte

$$P(D)y = x = xe^{0x} \quad (k = 1,\ m = 1 \ \text{ in } 13.11), \tag{7}$$

$$P(D)y = 2e^{-x} \quad (k = 2,\ m = 0 \ \text{ in } 13.11). \tag{8}$$

Nach 13.11 hat (7) spezielle Lösung $\psi_1(x) = h_1(x)e^{0x}$ mit Polynomfunktion h_1 zweiten Grades. Da Konstanten die zu (7) gehörige homogene Dgl. lösen, kann man annehmen, dass für $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$$h_1(x) = c_1 x + c_2 x^2.$$

Also

$$x = P(D)h_1(x) = (c_1 + 4c_2) + 2c_2 x.$$

Somit

$$c_2 = \frac{1}{2},\ \ c_1 = -2,$$

d.h.:

$$\psi_1(x) = -2x + \frac{1}{2}x^2.$$

Nach 13.11 hat (8) spezielle Lösung $\psi_2(x) = h_2(x)e^{-x}$ mit Polynomfunktion h_2 zweiten Grades. Durch Abziehen geeigneter Linearkombination der zugehörigen homogenen Dgl. kann man annnehmen, dass

$$\psi_2(x) = cx^2 e^{-x}$$

für ein $c \in \mathbb{C}$. Also

$$2e^{-x} = P(D)\psi_2(x) = -2ce^{-x},$$

wobei die zweite Gleichheit einfacher mit (+) und 13.4. Somit $c = -1$, d.h.:

$$\psi_2(x) = -x^2 e^{-x}.$$

Eine spezielle Lösung von (6) ist somit

$$\psi(x) := \psi_1(x) + \psi_2(x) = -2x + \frac{1}{2}x^2 - x^2 e^{-x}.$$

(ii) Sei $\omega_0, \omega \in]0, \infty[$, $a \in \mathbb{R}$. Betrachte Dgl.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = a\cos(\omega t). \tag{9}$$

(9) beschreibt Bewegung eines harmonischen Oszillators (vgl. 13.8 (iii)) der *Eigenfrequenz* ω_0 unter Wirkung von periodischen äußeren Kraft $a\cos(\omega t)$ (mit *Erregerfrequenz* ω). Betrachte zugehörige komplexe Dgl. (einfacher!)

$$P(D)x = \ddot{x} + \omega_0^2 x = ae^{i\omega t} \tag{10}$$

für $P(T) := T^2 + \omega_0^2 = (T - i\omega_0)(T + i\omega_0)$.
1. Fall. $\omega \neq \omega_0$.
Nach 13.11 ist $\psi(t) := ce^{i\omega t}$, $t \in \mathbb{R}$, für ein $c \in \mathbb{C}$ Lösung von (10). Also

$$ae^{i\omega t} = P(D)\psi(t) = c(\omega_0^2 - \omega^2)e^{i\omega t},$$

somit $c = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}$, d.h.:

$$\psi(t) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ist **spezielle** Lösung von (10), also

$$\varphi(t) := \operatorname{Re}(\psi(t)) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t), \quad t \in \mathbb{R},$$

spezielle Lösung von (9).
Fall. 2. $\omega = \omega_0$, „*Resonanzfall*“.
Wegen $P(i\omega_0) = 0$ hat nach 13.11 (10) spezielle Lösung

$$\psi(t) := cte^{i\omega_0 t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Also

$$ae^{i\omega t} = P(D)\psi(t) = 2ic\omega_0 e^{i\omega_0 t},$$

somit $c = \frac{a}{2i\omega_0}$, d.h.:

$$\psi(t) = -\frac{ai}{2\omega_0} t e^{i\omega_0 t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ist **spezielle** Lösung von (10), also

$$\varphi(t) := \operatorname{Re}(\psi(t)) = \frac{a}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t), \quad t \in \mathbb{R},$$

spezielle Lösung von (9). Für $a \neq 0$ wächst Amplitude unbegrenzt, d.h.: „*Resonanzkatastrophe*“.
In beiden Fällen 1 und 2 erhält man dann **allgemeine** Lösung von (9) mit Hilfe von 13.8 (iii) und 12.10 (ii).

14 Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Satz 14.1. *Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ (:= alle $n \times n$ Matrizen mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$) und $a \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ (d.h.: $Aa = \lambda a$). Dann ist*

$$\varphi(x) := ae^{\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

Lösung der Dgl.

$$y' = Ay.$$

Beweis. $\varphi'(x) = \lambda a e^{\lambda x} = Aae^{\lambda x} = A\varphi(x)$. □

Korollar 14.2. *$A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ besitze Eigenvektoren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^n$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, die eine Basis von $\mathbb{C}^n$ bilden. Dann bilden*

$$\varphi_k(x) := a_k e^{\lambda_k x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (k = 1, \ldots, n)$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der Dgl.

$$y' = Ay.$$

Beweis. Nach 14.1 sind alle φ_k, $k = 1, \ldots, n$, Lösungen. Da $\varphi_k(0) = a_k$, $k = 1, \ldots, n$, nach Voraussetzung linear unabhängig in $\mathbb{C}^n$, sind erst recht die Funktionen φ_k, $k = 1, \ldots, n$, linear unabhängig. □

Bemerkung 14.3. *Erinnere: $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ hat Eigenvektoren, die Basis von $\mathbb{C}^n$ bilden, genau dann, wenn $\exists S \in GL(n, \mathbb{C})$ (:= alle invertierbaren in $M(n \times n, \mathbb{C})$) mit*

$$B = S^{-1}AS$$

*ist Diagonalmatrix. Nicht jede Matrix in $M(n \times n, \mathbb{C})$ hat diese Eigenschaft. Aber **immer** $\exists S \in GL(n, \mathbb{C})$ mit*

$$B = S^{-1}AS$$

*ist obere Dreiecksmatrix, und Koeffizienten in Diagonale sind gerade die Eigenwerte. (Sogar $\exists S$ mit $B = S^{-1}AS$ hat **Jordan-Normalform**!)*

Lemma 14.4. *Seien $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$, $S \in GL(n, \mathbb{C})$. Dann $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ Lösung der Dgl.*

$$y' = Ay$$

genau dann, wenn $\psi := S^{-1}\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ Lösung der Dgl.

$$z' = (S^{-1}AS)z.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} & \varphi' = A\varphi \\ \Leftrightarrow \quad & S^{-1}\varphi' = S^{-1}A\varphi = (S^{-1}AS)\underbrace{S^{-1}\varphi}_{=\psi} \\ & \| \\ & (S^{-1}\varphi)' = \psi' \end{aligned}$$

□

Also kann man immer Dgl. $y' = Ay$ auf Fall mit Matrix in oberer Dreiecksgestalt (oder sogar Jordan-Normalform) zurückführen.

Beispiel 14.5 (aus der Physik!). Sei $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff.bar („*Potential*"). Betrachte Dgl.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla U(x) \quad \text{(Bewegung von Massenpunkt unter Einfluss von } U) \quad (*)$$

für gesuchte Funktion $x = x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$. Wollen Lösung in kleiner Umgebung einer Minimumstelle von U untersuchen. Hat U in $a \in \mathbb{R}^3$ lokales Minimum, so gilt

$$\nabla U(a) = 0.$$

Weiter sei vorausgesetzt, dass

$$A := \big(\operatorname{Hess} U\big)(a) := \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} U(a)\Big)_{1 \le i,j \le n} \quad \text{(symmetrisch!)}$$

positiv definit. Dann nach Taylor

$$U(a + \xi) = U(a) + \frac{1}{2}\langle \xi, A\xi \rangle + o\big(\|\xi\|^2\big).$$

Nach Translation des Koordinatensystems Œ $a = 0$. Näherung: Vernachlässige $o\big(\|\xi\|^2\big)$ (**sehr klein** für ξ klein!). Dann

$$U(x) = U(0) + \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle$$

und

$$\nabla U(x) = Ax.$$

Somit lautet Dgl. $(*)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -Ax.$$

Da A symmetrisch, ist A diagonalisierbar, also $\exists S \in GL(n, \mathbb{C})$ mit

$$S^{-1}AS =: B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Da A positiv definit, gilt $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2, 3$. Nach Transformation $y = S^{-1}x$ (vgl. 14.4, gilt auch für $y'' = Ay$!, *Beweis* analog!) geht Dgl. über in $\frac{d^2y}{dt^2} = -By$, d.h.:

$$\frac{d^2y_k}{dt^2} = -\lambda_k y_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Setzt man $\omega_k := \sqrt{\lambda_k}$, so lautet allgemeine Lösung dazu:

$$y_k(t) = \alpha_k \cos \omega_k t + \beta_k \sin \omega_k t, \quad k = 1, 2, 3,$$

mit beliebigen $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$.

Differentialgleichungssysteme in Dreiecksgestalt

Nach 14.4 kann man nach Koordinatentransformation Œ annehmen, dass Diff.gleichungssystem folgende Form hat: $z' = Bz$ mit $B = (b_{ij})$ von oberer Dreiecksgestalt, also:

$$\begin{aligned}
z_1' &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1,n-1}z_{n-1} + b_{1,n}z_n \\
z_2' &= b_{22}z_2 + \cdots + b_{2,n-1}z_{n-1} + b_{2,n}z_n \\
&\vdots \\
z_{n-1}' &= b_{n-1,n-1}z_{n-1} + b_{n-1,n}z_n \\
z_n' &= b_{nn}z_n.
\end{aligned}$$

Hier sind $b_{11}, \dots, b_{nn}$ die Eigenwerte von B. Eine Lösung

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$$

dieses Dgl.-Systems zu beliebig vorgegebener Anfangsbedingung

$$f(x_0) = c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

erhält man, mit letzter Zeile beginnend, wie folgt:
Die letzte Gleichung $z_n' = b_{nn} z_n$ besitzt Lösung der Gestalt

$$f_n(x) = \alpha_n e^{b_{nn} x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

(vgl. Kapitel 13) mit α_n so, dass $f_n(x_0) = c_n$ (also $\alpha_n := c_n e^{-b_{nn} x_0}$). Einsetzen in vorletzte Zeile des Systems ergibt inhomogene lineare Dgl.

$$z_{n-1}' - b_{n-1,n-1} z_{n-1} = b_{n-1,n} f_n(x),$$

die mit 13. gelöst werden kann. Hat man $f_n, f_{n-1}, \dots, f_{k+1}$ schon gefunden, erhält man wieder mit 13. f_k als Lösung der inhomogenen linearen Dgl.

$$z_k' - b_{kk} z_k = \sum_{j=k+1}^{n} b_{kj} f_j(x).$$

So fortfahrend, erhält man vollständige Lösung des Dgl.-Systems.

Beispiel 14.6. Betrachte Dgl.-System

$$y' = Ay$$

mit $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Es gibt drei Fälle.
Fall 1. $\exists$ Basis $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ von $\mathbb{C}^2$, die Eigenvektoren von A sind, mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Dann

$$\varphi_1(x) := a_1 e^{\lambda_1 x}, \quad \varphi_2(x) := a_2 e^{\lambda_2 x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

Lösungs-Fundamentalsystem.
Fall 2. A hat zwei konjugiert-komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{R}^* \ \ (:= \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Dann zugehörige Eigenvektoren auch konjugiert-komplex, also

$$a_{1,2} = b \pm ic, \quad b, c \in \mathbb{R}^2.$$

(Begründung: $A(b+ic) = (\mu + i\omega)(b+ic) = \mu b - \omega c + i(\mu c + \omega b)$, also, da A reelle Komponenten hat, $Ab = \mu b - \omega c$, $Ac = \mu c + \omega b$. Dann aber $A(b-ic) = Ab - iAc = (\mu b - \omega c) - i(\mu c + \omega b) = (\mu - i\omega)(b - ic)$.)
Da a_1, a_2 linear unabhängig, sind dies auch b und c. Aus komplexen linear unabhängigen (!) Lösungen

$$\varphi_k(x) = a_k e^{\lambda_k x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2,$$

erhält man wie oben reelles Lösungs-Fundamentalsystem:

$$\psi_1(x) := \frac{1}{2}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = (b\cos(\omega x) - c\sin(\omega x))e^{\mu x},$$
$$\psi_2(x) := \frac{1}{2i}(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) = (b\sin(\omega x) + c\cos(\omega x))e^{\mu x}.$$

Bemerkung. *Da λ_1, λ_2 als Eigenwerte von A Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P_A(T) := \det(T\,\mathrm{Id} - A)$ (Id = Einheitsmatrix!) sind, also eines Polynoms mit reellen Koeffizienten, kann im Fall, dass $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tatsächlich **nur** der Fall 2 auftreten. Es bleibt also nur der folgende Fall übrig, wo $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und keine Eigenbasis (wie im Fall 1) existiert.*

Fall 3. A hat nur **einen** reellen Eigenwert mit **eindimensionalem** Eigenraum.
Dann $\exists S \in GL(2, \mathbb{R})$ mit

$$B := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

(Man kann sogar $\alpha = 1$ erreichen!)
Vermöge Substitution $z = S^{-1}y$ erhalte Dgl. $z' = Bz$, d.h.:

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda z_1 + \alpha z_2, \\ z_2' &= \lambda z_2. \end{aligned}$$

Wollen Lösungs-Fundamentalsystem ψ_1, ψ_2 dazu finden mit Anfangsbedingungen

$$\psi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektor, ergibt sich

$$\psi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für $\psi_2 = \begin{pmatrix} \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{pmatrix}$ erhält man nach obigem Verfahren

$$\psi_{22}(x) = e^{\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

und demgemäß nach Einsetzen in Dgl. ergibt sich für ψ_{21} die Dgl.

$$z_1' - \lambda z_1 = \alpha e^{\lambda x}.$$

Also nach 13.

$$\psi_{21}(x) = \alpha x e^{\lambda x}.$$

Es gilt $\psi_{21}(0) = 0$, $\psi_{22}(0) = 1$, also Anfangsbedingung $\psi_2(0) = \begin{pmatrix} \psi_{21}(0) \\ \psi_{22}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt. Rücksubstitution $\varphi_1 = S\psi_1$, $\varphi_2 = S\psi_2$ ergibt

$$\varphi_1(x) = ve^{\lambda x}, \quad \varphi_2(x) = (w + \alpha x v)e^{\lambda x},$$

wobei

$$S =: \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Literaturverzeichnis

[AE01] Herbert Amann and Joachim Escher, *Analysis 2*, Birkhäuser, 2001.

[AE02] ———, *Analysis 1*, Birkhäuser, 2002.

[Fis00] Gerd Fischer, *Lineare Algebra*, Vieweg, 2000.

[For99] Otto Forster, *Analysis 2, Differentialrechnung im* $\mathbb{R}^n$*, Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg, 1999.

[For01] ———, *Analysis 1, Differential- und Integralrechung einer Veränderlichen*, Vieweg, 2001.

[Kel75] John L. Kelley, *General topology*, Springer, 1975.

[Lan60] Edmund Landau, *Grundlagen der Analysis: das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen, komplexen Zahlen; Ergaenzung zu den Lehrbuechern der Differential- und Integralrechnung*, Chelsea Publ. Co., 1960.