WS 2008/09
M. Röckner

# Übungen zu Analysis I

Blatt 1

*Die mit einem Stern gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben. Für gute Lösungen von Zusatzaufgaben gibt es je nach Schwierigkeit 1 oder 2 Zusatzpunkte.*

1. ( *Berechnungsformeln für Summen und Produkte, Teil 1* ).
Beweise, dass für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt :

a)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \qquad \textit{(3 Punkte)}$$

*b)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

c)

$$(1+x) \cdot (1+x^2) \cdot (1+x^4) \cdot \cdots \cdot (1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

für alle $x \neq 1$. *(3 Punkte)*

2. ( *Berechnungsformeln für Summen, Teil 2 : Wie kommt man auf die Formel ?* )
Berechne $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$ für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5. Errate nun eine Formel für die Summe, die für beliebige natürliche Zahlen $n$ gilt. Beweise diese Formel. *(4 Punkte)*

3. ( *Vorübung zum Rechnen mit Absolutbeträgen, Fallunterscheidung* )
Der Absolutbetrag $|x|$ einer reellen Zahl $x$ ist definiert durch

$$|x| = x \quad \text{für } x \geq 0,$$
$$|x| = -x \quad \text{für } x < 0.$$

Bestimme alle reellen Zahlen $x$ mit

$$x + |x-2| = 1 + |x|. \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

*Hinweis : Unsere unausgesprochene Erwartung bei der Bearbeitung von Aufgaben dieses Typs ist, dass Sie*

*1.) alle Lösungen angeben,*

*2.) zeigen, dass die angegebenen Zahlen tatsächlich die Gleichung lösen,* **und**

*3.) zeigen, dass die Gleichung keine weitere Lösung hat.*

4. ( *Negieren von mathematischen Aussagen* )
Die Negation einer Aussage A ist diejenige Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist. Formuliere die Negation der folgenden Aussagen in möglichst einfacher Form :

a) $n$ ist grösser als 3, und $n$ ist nicht durch 4 teilbar. *(1 Punkt)*

b) Wenn $x$ grösser als 5 ist, dann gilt $f(x) \leq x^2$. *(1 Punkt)*

c) Es gibt ein $x \in [-1, 1]$ mit $f(x) = 7$. *(1 Punkt)*

d) Für alle reellen Zahlen $x$ gibt es eine natürliche Zahl $n$ mit $|x - n| \leq 1$. *(1 Punkt)*

*e) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle reellen Zahlen $y$ mit $|y - x| < \delta$ gilt : $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

5. ( *Mengen* ). Seien $A$, $B$ und $C$ Mengen. Zeige :

a)
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

b)
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \qquad \textit{(1 Punkt)}$$