WS 2008/09
M. Röckner

Übungen zu Analysis I

Blatt 9

1. Man zeige, daß

$$\cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

und berechne $\cos(\pi/6)$, $\sin(\pi/6)$ und $\tan(\pi/6)$. *(3 Punkte)*

2. Für $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sei $\zeta_{n,k} = e^{i\frac{k}{n}x}$, $k = 0, \ldots, n$. Durch geradlinige Verbindung von $\zeta_{n,k}$ mit $\zeta_{n,k+1}$ erhält man einen Polygonzug, der 1 mit e^{ix} verbindet. Die Länge dieses Polygonzuges ist $L_n := \sum_{k=0}^{n-1} |\zeta_{n,k+1} - \zeta_{n,k}|$. Zeige:

(a) $L_n = 2n|\sin\frac{x}{2n}|$;

(b) $\lim_{n\to\infty} L_n = |x|$. *(3 Punkte)*

3. Zeige:
(a) Zu a, $b \in \mathbb{R}$ gibt es c, $d \in \mathbb{R}$ mit $a\sin x + b\cos x = c\sin(x+d)$. Berechne passende c, d zu $a = \sqrt{3}$ und $b = -3$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sin x = 2^n \sin\frac{x}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}$. *(4 Punkte)*

4. (Approximierbarkeit durch lineare Funktionen)
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f an der Stelle a durch eine lineare (genauer: affin lineare) Funktion mit quadratischem Fehler approximierbar ist, falls b, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $K > 0$ mit

$$|f(a+x) - (b+cx)| \le Kx^2, \qquad \forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

existieren.
(a) (2 Punkte) Was bedeutet die Definition anschaulich? Zwischen welchen zwei Kurven liegt der Graph von f im Falle $a = 0$? Was gilt im Falle $a \neq 0$?
(b) (4 Punkte) Zeige, dass die Funktionen $f(y) = y^2$, $f(y) = y^3$ und $f(y) = \exp(y)$ an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$ mit quadratischem Fehler linear approximierbar sind. Bestimme jeweils bund c.